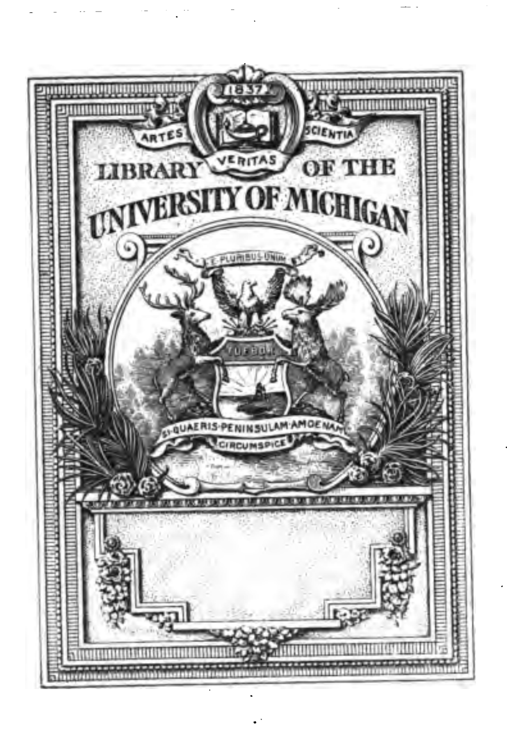

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne

VAZEILLE
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe

2e SÉRIE

TOME DEUXIÈME



Année 1883.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

COMITÉ DE RÉDACTION

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par **M. Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

NOTATIONS

A, B, C les sommets du triangle, a, b, c, p ses trois côtés et son demi-périmètre ;
r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits;
A′, B′, C′, les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle inscrit;
A'_a, B'_a, C'_a id. avec le cercle ex-inscrit tangent à BC;
A'_b, B', C' id. id. id. AC;
A', B'_c, C' id. id. id. AB;
h_a, h_b, h_c les trois hauteurs;
R, S le rayon du cercle circonscrit au triangle et sa surface.
L'axe des x sera CB et celui des y, CA;
ξ, η seront les coordonnées d'un point Θ du plan ;

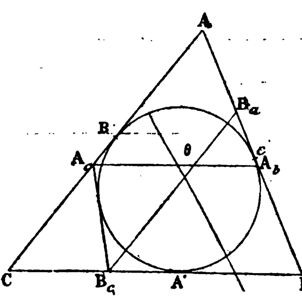
La parallèle à	CB	menée par Θ coupera	CA	en A_c et	BA	en A_b
—	BC	—	BC	B_c	BA	B_a
—	BA	—	CA	C_a	BC	C_b

O, o, O_α, O_β, O_γ seront respectivement les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle;
G le centre de gravité.

Problème I. — *On sait que les six points* A_c, C_a, B_a, A_b, C_b, B_c, *intersections avec les côtés du triangle des parallèles à ces côtés menées par* Θ, *forment un hexagone circonscriptible à*

une conique; je vais déterminer les points pour lesquels cette conique est un cercle.

Dans ce cas ce cercle sera évidemment l'un des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle; il ne reste qu'à trouver les points Θ correspondants.



Cherchons le point Θ_1, tel que la conique inscrite à l'hexagone soit le cercle inscrit au triangle.

Le point Θ_1 appartient au lieu des points obtenus en menant une tangente quelconque B_c A_c au cercle inscrit, puis par B_c une parallèle à AC et par A_c une parallèle à BC, et en prenant l'intersection de ces parallèles on a

$B_cA_c = B_cA' + A_cB' = CA' - x + CB' - y = 2(p-c) - x - y$

mais on a $\overline{A_cB_c}^2 = \overline{CB_c}^2 + \overline{CA_c}^2 - 2CB_cCA_c \cos C.$

L'équation du lieu est donc

$$[2(p-c) - x - y]^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos C.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(x - \frac{ab}{p}\right)\left(y - \frac{ab}{p}\right) - \frac{ab(p-a)(p-b)}{p^2} = 0. \quad (1)$$

L'examen de cette équation montre :

1° Que le lieu est une hyperbole;

2° Que le centre de la courbe est le point $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ab}{p} \\ y = \dfrac{ab}{p} \end{array}\right.$ symétrique de C par rapport au centre du cercle inscrit;

3° Que les asymptotes sont les droites $x = \dfrac{ab}{p}$, $y = \dfrac{ab}{p}$ parallèles respectivement à CA et à BC et tangentes au cercle inscrit;

4° Que la bissectrice de l'angle ACB est l'axe transverse de la courbe;

5° Que le lieu passe en A' et en B'.

Le point Θ_1 appartiendra évidemment aussi au lieu analogue construit dans l'angle CBA.

Ce lieu sera une hyperbole qui aura avec la précédente la droite $y = \frac{ab}{p}$ pour asymptote commune et le point A' pour point commun ; l'autre point commun à ces deux courbes et situé à distance finie sera le point Θ_1 cherché.

On trouve par une transformation facile de coordonnées que cette seconde hyperbole a pour équation

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{p-c}{p}\right) + \frac{b(p-a)(p-c)}{p^2} = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(x - \frac{ab}{p}\right) + \left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{ab}{p} - a + \frac{ac}{p} + \frac{ay}{b}\right) + \frac{ab(p-a)(p-c)}{p^2} = 0. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire pour coordonnées du point Θ_1

$$\Theta_1 \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{a(2b-p)}{p} = 2\,\dfrac{ab}{p} - a = \dfrac{a(3b-a-c)}{2p}, \\[2ex] y = \dfrac{b(2a-p)}{p} = 2\,\dfrac{ab}{p} - b = \dfrac{b(3a-b-c)}{2p}. \end{array}\right.$$

Comme $\frac{ab}{2p}$ représente la valeur des coordonnées du centre du cercle inscrit, on conclut de ces valeurs une construction très simple du point Θ_1.

On voit aussi que si un côté égale le quart du périmètre, par exemple $a = \frac{p}{2}$, le point Θ_1 se trouvera en A'.

On a le théorème suivant :

Théorème I. — *Si dans un triangle un côté égale le quart du périmètre et que par le point de contact du cercle inscrit avec ce côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, on formera un parallélogramme dont une des diagonales sera tangente au cercle inscrit.*

Des valeurs des coordonnées de Θ_1 on tire par soustraction

$$y - x = a - b,$$

ce qui prouve que le point Θ_1 est sur cette droite de facile construction ; comme il est aussi sur les droites analogues par rapport aux angles B et C, on peut le construire simplement, ce qui fournit le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* a, b, c *les côtés d'un triangle rangés par ordre de grandeur croissante.*

Sur AC *et suivant la direction* AC *je prends* AI $= c - b$;

— CB — — CB — $CI_\gamma = b - a$;

— AB — — AB — $BI_\beta = a - c$.

Les trois droites menées par les points I_α, I_γ, I_β, *respectivement parallèles aux bissectrices des angles* CAB, ACB, ABC, *se coupent au même point.*

On calcule facilement

$$A_cA_b = \frac{2a(p-a)}{p},$$

$$B_cC_b = \frac{a(2a-p)}{p},$$

$$A_cB_c = \frac{c(p-c)-(a-b)^2}{p}.$$

On voit aussi que pour le point Θ_1 les trois segments CB_c, B_cC_b, C_bB sont respectivement proportionnels à

$$2b-p, \quad 2a-p, \quad 2c-p.$$

(A suivre.)

ÉQUATION

DU SYSTÈME DES TANGENTES MENÉES A UNE CONIQUE PAR UN POINT DONNÉ

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

$f(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la conique, (α, β, γ) le point donné, soit (x', y', z') le point de contact d'une tangente et (x, y, z) un point de cette droite ; désignons par X, Y, Z les demi-dérivées partielles de $f(x, y, z)$, puis par X', Y', Z' et X_1, Y_1, Z_1, ce qu'elles deviennent respectivement quand on y introduit les coordonnées (x', y', z') et (α, β, γ).

On a
$$\left\{\begin{array}{l} Xx' + Yy' + Zz' = 0, \\ X_1x' + Y_1y' + Z_1z' = 0, \\ X'x' + Y'y' + Z'z' = 0\,; \end{array}\right. \qquad (1)$$
donc, x' y' z' n'étant pas tous nuls, on a la condition
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = 0.$$
Il en résulte que les équations
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda X + \mu X_1 + \nu X' = 0, \\ \lambda Y + \mu Y_1 + \nu Y' = 0, \\ \lambda Z + \mu Z_1 + \nu Z' = 0, \end{array}\right. \qquad (2)$$
sont satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de λ, μ, ν. D'ailleurs elles n'admettent pas $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, si le discriminant de $f(x, y, z)$ est différent de zéro, puisque ces hypothèses les réduisent à $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, équations linéaires qui n'auraient pour solution que les valeurs nulles de x', y', z', leur déterminant n'étant pas nul.

Ainsi λ et μ ne sont pas nuls à la fois. Multiplions par x, y, z respectivement les équations (2) et ajoutons membre à membre; puis recommençons la même addition, après avoir multiplié par α, β, γ, il vient, en vertu d'identités connues:
$$\lambda f(x, y, z) + \mu \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right] = 0\,;$$
$$\lambda \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right] + \mu f(\alpha, \beta, \gamma) = 0\,;$$
λ et μ n'étant pas nuls à la fois, il faut qu'on ait
$$f(x, y, z) f(\alpha, \beta, \gamma) - \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right]^2 = 0.$$

Réciproquement quand un point (x, y, z) satisfait à cette équation, le point (α, β, γ) est sur l'une des tangentes menées de (x, y, z) à la conique. Elle représente donc le système des deux tangentes menées de (α, β, γ).

Remarque. — Il est aisé d'appliquer la méthode à la recherche de l'équation du cône circonscrit à une quadrique et ayant un sommet donné. C'est un exercice que nous proposons aux jeunes lecteurs du Journal.

QUESTION 5

Solution par M. ALEXANDRE, élève de mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$\mathrm{n}x^{\mathrm{n}} - x^{\mathrm{n}-1} - x^{\mathrm{n}-2} \ldots - x - 1 = 0$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, *n'a aucune racine réelle si* n *est impair et une seule racine négative si* n *est pair.* (G. L.)

En faisant passer dans le second membre tous les termes à partir du second, on a

$$nx^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \qquad (1)$$

ou

$$nx^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \qquad (2)$$

En multipliant par $x - 1$, ce qui introduit la racine $x = 1$ qui sera alors double, on a

$$nx^{n+1} - (n + 1)\,x^n + 1 = 0. \qquad (3)$$

La dérivée

$$n(n + 1)x^n - n(n + 1)x^{n-1} = 0.$$

a pour racines $x = 1$ et $x = 0$, cette dernière d'ordre de multiplicité $(n - 1)$. L'équation proposée qui n'a pas d'autre racine positive que $x = 1$, aura au plus une racine négative, car si elle en avait deux, la dérivée aurait aussi une racine négative. A la substitution de $-\infty$ et de 0 dans (3) ne donnent des signes contraires que dans le cas où n est pair. Donc dans ce cas seulement (1) a une racine négative en plus de de la racine $x = 1$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, au lycée Saint-Louis, P. Godefroy, à Lyon ; Mettetal, à Besançon.

QUESTION 7

Solution par M. GRIFFON, commis des bureaux de l'intendance militaire du 16e corps, Montpellier.

Trouver sans appliquer la règle de L'Hopital, la vraie valeur de l'expression

$$(1)\quad y = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \ldots - 2x - 1}{x-1}.$$

pour $x = 1$. (G. L.)

Pour $x = 1$, y prend la forme $\frac{0}{0}$. Or le numérateur peut s'écrire

$$\left[n + (n-1) + \ldots + 1\right] x^{n-1} (-x\ 1)$$
$$+ \left[(n-1) + (n-2) + \ldots + 1\right] x^{n-2} (x-1)$$
$$+ (3 + 2 + 1)\, x^2 (x-1) + (2+1)\, x(x-1) + 1(x-1).$$

On y découvre le facteur $x - 1$; donc la valeur (1) peut s'écrire

$$y = \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} + \frac{(n-1)x}{2} x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$
$$x^{n-3} + \ldots + \frac{2.3}{2} x + \frac{1.2}{2}$$

et si on y fait $x = 1$

$$y = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \ldots + \frac{1.2}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. P. Godefroy, à Lyon; Mosnat, à Thiers; Alexandre, à Angers; Harang, école Saint-Sigisbert, à Nancy.

QUESTION 34

Solution par M. G. Forest, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

On considère deux points fixes O *et* O′ *et une droite* Δ *perpendiculaire à* OO′ *au point* A*; soit* M *un point quelconque de* Δ*; on mène* MO *et* MO′*; puis à la droite* MO′ *on élève au point* O′ *une perpendiculaire qui rencontre* OM *au point* M′ ; *on pose alors* M′O′ = x, MO′ = y, *et l'on considère un point* I *qui a pour coordonnées* x *et* y, *par rapport à un angle droit donné* yOx. *Trouver le lieu décrit par ce point* I *quand* M *se meut sur* Δ, *et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à* A *toutes les positions possibles sur* OO′. *Démontrer que la courbe est unicursale.* (G. L.)

1. — Posons-nous un problème plus général. Supposons que le point M décrive une certaine courbe $f(y,\omega) = 0$, donnée en coordonnées polaires et rapportée à l'origine O′. Soient a la distance OO′, x et y les deux distances O′M′ et O′M.

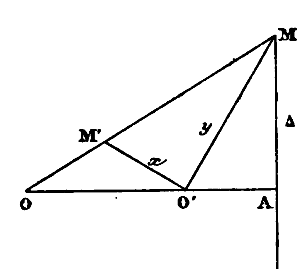


Fig. 1.

Menons par le point M′ une parallèle à O′M, et par M une perpendiculaire à O′M.

Les deux triangles semblables OM′K′ et OMO′ donnent

$$\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{OM}} = \frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}.$$

Les deux triangles semblables OMK et OM′O′ donnent

$$\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{OM}} = \frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}.$$

Égalant les seconds membres des deux égalités

$$\left(\frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}\right) = \left(\frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}\right)$$

ou $$a^2 - \frac{ax}{\sin\omega} - \frac{xy}{\sin\omega\cos\omega} + \frac{ay}{\cos\omega} = a^2$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\sin\omega}{x} - \frac{\cos\omega}{y} = \frac{1}{a}, \qquad [1]$$

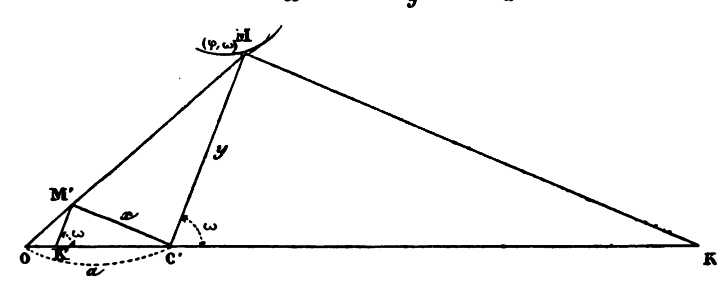


Fig. 2.

cette formule donne une relation entre x, y, ω. Par conséquent, si on suppose que le point M décrive un certain lieu géométrique $f(y, \omega) = 0$ [2], on n'aura pour obtenir une relation entre x et y qu'à éliminer l'angle ω entre les deux équations [1] et [2], et la relation $f(x, y) = 0$ représentera l'équation du lieu décrit par le point dont les coordonnées sont x et y.

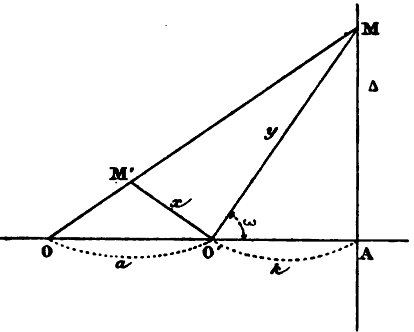


Fig. 3.

2.— Dans le cas du problème que nous avons à résoudre, le lieu du point M est une droite perpendiculaire au point A à la droite OO'.

Soit k la distance O'A, l'équation $f(y, \omega) = 0$ est ici

$$k = y \cos\omega \quad [2'].$$

Il faut donc éliminer l'angle ω entre les deux équations [1] et [2']. On a d'abord $\cos\omega = \frac{k}{y}$. [3]

Transportant cette valeur dans l'équation [1], celle-ci devient résoluble par rapport à $\sin\omega$:

$$\sin\omega = x\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right). \qquad [4]$$

La relation demandée est donc

$$\frac{k^2}{y^2} + x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right)^2 = 1.$$

3. — Discussion. — Cette équation est résoluble par rapport à x^2, et l'on a $x^2 = \frac{a^2y^2(y^2 - k^2)}{(y^2 + ak)^2}$.

C'est une courbe du 6me degré, symétrique par rapport à l'origine et par rapport aux deux axes. L'origine est un point double isolé. La courbe est tout entière extérieure aux parallèles $y = +k$, $y = -k$.

On peut supposer que le point A se meut de la droite OO' vers la gauche, et nous allons montrer qu'il existe cinq formes différentes pour la courbe.

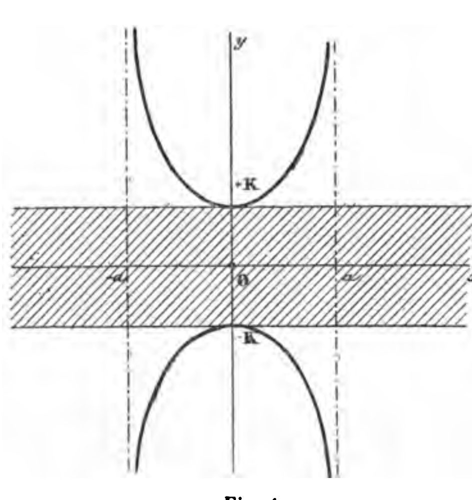


Fig. 4.

1° Supposons le point A à droite de O'; k est compté positivement.

L'équation révèle qu'il n'y a que deux asymptotes parallèles à l'axe des y, données par le coefficient de y^4, $(x^2 - a^2)$. La courbe ne rencontre pas ces asymptotes lorsque k est positif, car on trouve pour les ordonnées des points communs

$y = \pm \sqrt{-\dfrac{a^2k^2}{k(a+k)}}$, quantités imaginaires si k est positif. Les points $(-k)$ et $(+k)$ sur l'axe des y font partie de la courbe qui est tangente en ces points aux deux horizontales $y = k$, $y = -k$ (fig. 4).

2° Le point A est en O′. Alors $k = 0$. L'équation devient

$$x^2 = \frac{a^2y^4}{y^4} \text{ ou } x = \pm a.$$

Le lieu se compose des deux verticales $x = + a$, $x = - a$.

3° Le point A est situé entre O et O′, par conséquent. k est négatif. Les deux asymptotes $x = \pm a$ sont conservées; on a deux autres asymptotes parallèles à l'axe des x, données par le coefficient de x^2, $y = \pm \sqrt{-ak}$. Ces asymptotes horizontales sont doubles. La figure 2 indique la construction des valeurs OA et OA′.

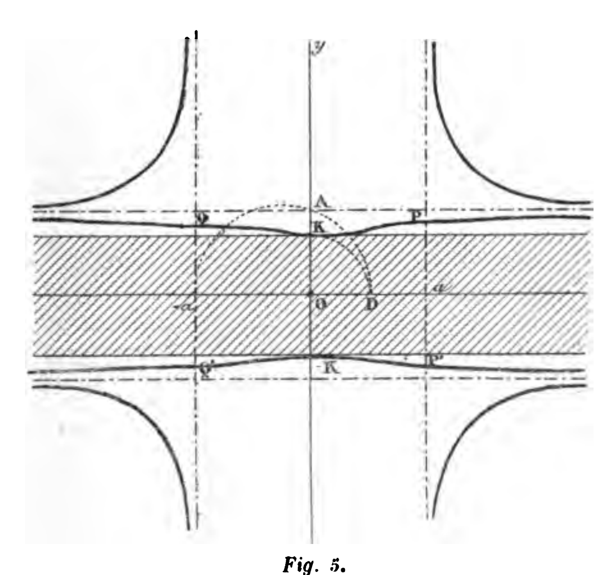


Fig. 5.

La courbe rencontre les asymptotes $x = \pm a$ en quatre points P, P′, Q, Q′ donnés par l'équation $y = \dfrac{\pm a\sqrt{-k}}{\sqrt{2a+k}}$.

La figure 5 représente la courbe dans ce cas.

Le point A peut occuper la position particulière du milieu de OO′. Alors $k = -\frac{a}{2}$, l'équation se simplifie:

$$x^2 = \frac{a^2y^2(4y^2 - a^2)}{(2y^2 - a^2)^2}.$$

Les asymptotes doubles A et A′ ont dans ce cas pour équation $y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Les droites de séparation en régions deviennent

$$y = \pm\frac{a}{2}.$$

Les ordonnées des points P, P′, Q, Q′ sont $y = \pm\frac{a\sqrt{3}}{3}$, va-

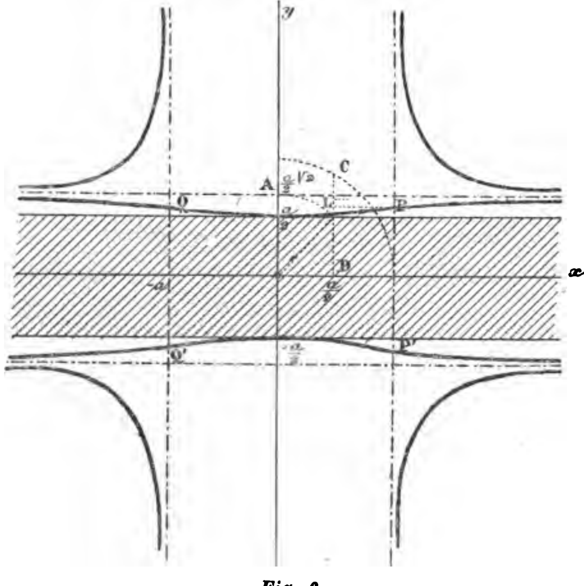


Fig. 6.

leur que l'on peut construire ainsi que l'indique la figure 6 en prenant $LD = \frac{2}{3}$ CD.

4° Le point A est arrivé en O. Alors $k = -a$. L'équation de la courbe est $x^2 = \dfrac{a^2y^2(y^2 - a^2)}{(y^2 - a^2)^2}$.

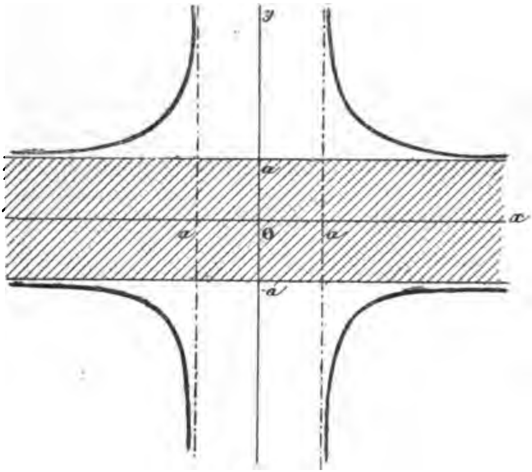


Fig. 7.

On aperçoit le facteur $y^2 - a^2$ qui représente les deux horizontales $y = \pm a$. Les branches de courbe PkQ, P'($-k$)Q

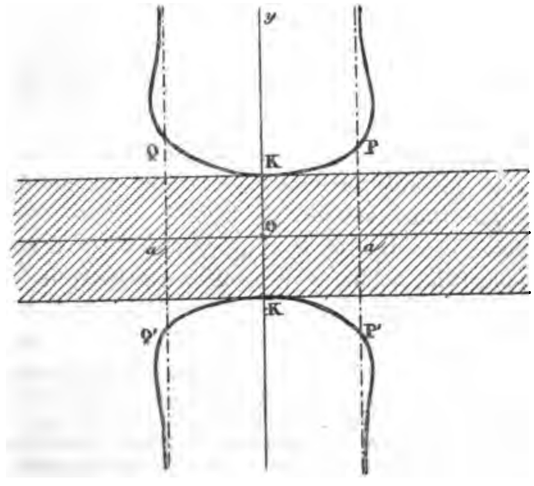


Fig. 8.

se confondent avec ces droites qui font partie du lieu. Les quatre autres branches sont conservées. La courbe est dans ce cas symétrique par rapport aux bissectrices des axes. La figure 7 en indique la forme.

5° H est à gauche de O. Alors $-a > -k < o$.

Les asymptotes doubles horizontales $y = \pm\sqrt{-ak}$ sont comprises dans la région où il n'y a pas de points de la courbe; elles sont donc imaginaires. Les deux autres asymtotes existent toujours. La courbe rencontre ces deux asymptotes en quatre points P, P′, Q, Q′, donnés par l'équation $y = \frac{\pm a\sqrt{-K}}{\sqrt{2a + K}}$ (*fig. 8*).

On peut encore considérer le cas où le point H est à l'infini. Alors K est infini. On a $x^2 = \frac{a^2y^2}{a^2}$ ou $x^2 \times y^2 = o$. On trouve le point double isolé à l'origine.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE FERMAT

A MERSENNE [1]

. . . .

Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires.

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la géostatique et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

Après cela, je satisferai à la question de la tangente du galand [2] parallèle à l'axe, c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée de position [3].

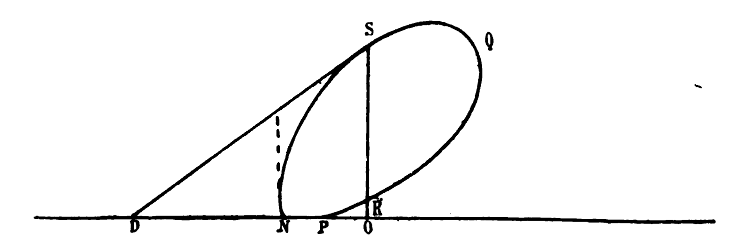
(1) Cette lettre si curieuse et si précieuse pour l'histoire des sciences mathématiques nous a été communiquée par M. Ed. Lucas. Elle lui a été confiée, avec d'autres manuscrits inédits, par le prince Boncompagni, qui l'a autorisé à les publier. La science sera reconnaissante au prince Boncompagni du dévouement constant et désintéressé qu'il ne cesse de lui témoigner. *(G. L.)*

(2) Fermat appelle ainsi la courbe que nous appelons le *folium de Descartes*.

(3) L'axe des x.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée, et qui l'a paru à M. de Roberval (car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad Locos* (¹), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux pour éviter les asymétries (²), et ces longueurs d'équation qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR, la droite donnée de position DNOP, et la ligne *z* donnée de grandeur. La propriété du



galand est que, quelque point que vous preniez, comme S ou R, le solide sous *z in NO in OS* est égal aux deux cubes NO et OS, ou bien le solide sous *z in ON in OR* est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple, du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit. Soit fait.

Par ma méthode des tangentes, si NO est appelé *d*, et OS, *b*, la ligne OS sera égale à

$$\frac{b \text{ cub. bis} - d \text{ cub. } (^3)}{z \text{ in } b - d.\text{ q ter}},$$

et si la tangente était du côté d'en bas, la ligne OD serait

$$\frac{d \text{ cub.} - b \text{ cub. bis}}{d \text{ q. ter} - z \text{ in } b}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas. Supposons que NO, inconnu, s'appelle *a*, et que OS s'appelle *e*, nous

(¹) *Varia opera math.*, p. 9.

(²) Irrationnelles ou radicaux.

(³) Cette expression, avec nos notations actuelles, s'écrirait $\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2}$.

aurons pour la ligne OD :

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit, et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales ; il faudra donc que

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub.}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}} \text{ soit égal à } e,$$

et, par conséquent,

e cub. bis — *a* cub. sera égal à *z* in *e* q. — *a* q. in *e* ter.

Or, par la propriété de la ligne

a cub. est égal à *z* in *a* in *e* — *e* cub.

Nous aurons donc

e cub. — *z* in *a* in *e* égal à *z* in *e* q. — *a* q. in *e* ter (1).

Divisons le tout par *e* ; nous aurons

e q. — *z* in *a* égal à *z* in e — *a* q. ter

et enfin

e q. — in *z* égal à *z* in *a* — *a* q. ter ;

et partant nous avons un lieu elliptique, et le point S *est ad ellipsim positione datam, sed est etiam ad curvam positione datam, ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux, et par ma méthode topique.

On fera avec la même facilité la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez par la même méthode faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée. En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je fais.

Pour la tangente de la roulette, bien loin d'en faire un mystère, je veux vous faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées (2) ou les portions de leurs diamètres (3) ont relation à des lignes droites,

---

(1) Il faudrait, au premier terme du premier membre *e* cub. ter ; de même, dans les deux égalités suivantes.

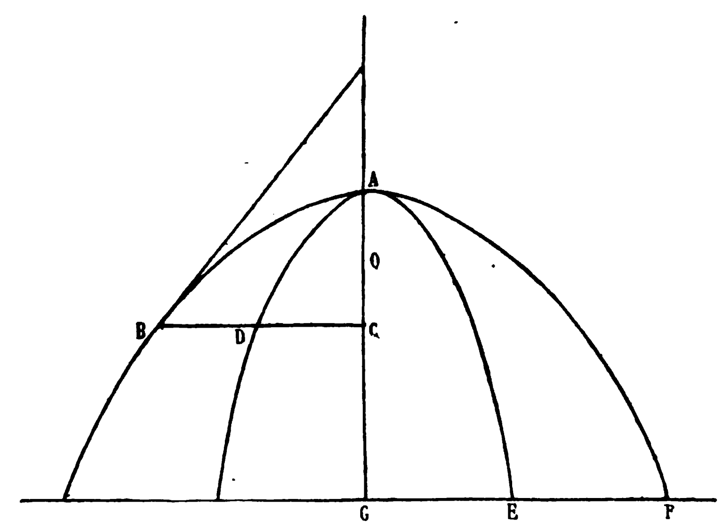
(2) Ordonnées.

(3) Abcisses.

me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leurs diamètres ont relation à d'autres courbes. Je vous ai déjà fait voir l'exemple de la roulette.......

En voici un autre exemple.

Soit la parabole EDAG, de laquelle l'axe AG et le sommet A. Soit une autre courbe ABF de mêmes axe et sommet, et que BC, appliquée, soit égale à la portion [1] de parabole DA, et l'appliquée FG égale à la portion de parabole EA, etc., à l'infini. Il faut mener au point B de cette nouvelle courbe une tangente.



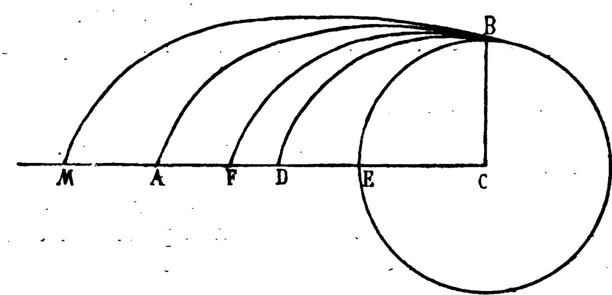
Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole; faisons comme OA + AC à AC, ainsi du quarré BC au quarré CN; la ligne BN touchera la courbe FBA.

Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que d'en faire voir les solutions. Mais pour le suivant je le propose à M. de Roberval, et si j'osais encore, à M. Descartes.

---

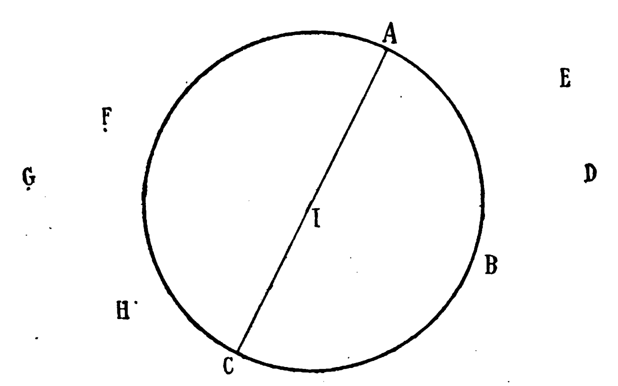
[1] Segment.

Soient autant de courbes qu'on voudra de même sommet B, comme BE, BD, BF, BA, données par position, et soit



imaginée une autre courbe de même sommet comme MB, en sorte que les appliquées de cette dernière, comme MC, soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes AB, BF, BD, BE, et la somme des appliquées AC, FC, DC, EC ; il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe. Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce, sans aucune asymétrie, ce qui semble merveilleux.

Avant de quitter la Géométrie, je vous donne encore une



spéculation, qui est excellente et qui allonge infiniment l'affinité au lieu plan : *Si a quotcunque punctis*, etc., laquelle

j'ai trouvé en cherchant les lieux *ad superficiem*. C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano*, comme par exemple : soient les points donnés D, E, F, G, H et le cercle trouvé ABC, en sorte que quel point vous preniez en sa périphérie comme A, les carrés DA, EA, FA, GA, HA soient égaux à un espace donné ; je dis que, si autour du point I comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle ABC soit un des grands, que, quel point vous prendrez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem*, mais je ne puis vous dire tout à la fois.

Le quadrilatère de M. de Roberval que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand sera différé au premier voyage.

Il faut que je vous dise encore qu'on peut mener la tangente de 45⁰, au galand, par une voie qui semble plus géométrique ; car là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché, par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

Supposons que z le côté droit [1] du galand est inconnu, et que AD est une ligne donnée nommée b, que DB est inconnue nommée a.

Donc le côté droit sera

$$\frac{a \text{ cub.} + b \text{ cub.}}{b \text{ in } a}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{b \text{ in } a \text{ cub. bis} - b \text{ qq.}}{a \text{ cub} - b \text{ cub. bis}},$$

laquelle il faut faire égale à a.

Nous aurons donc

$$a \text{ qq.} - b \text{ cub. in } a \text{ bis égal à } b \text{ in } a \text{ cub. bis} - b \text{ qq.},$$

[1] Côté droit, *latus rectum*, paramètre.

et enfin

b in *a* cub. bis + *b* cub. in *a* bis — *a* qq. égal à *b* qq., laquelle équation (pour trouver la valeur de *a*) se peut résoudre ou par ma méthode topique ou par telle autre qu'on voudra.

Or *a* étant connu, le côté droit *z* sera connu. Et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire : comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou *b* donnée, ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne qui déterminera un point semblable au point D et la question est faite. Si j'ai manqué ici la supputation, vous la corrigerez. car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

Pour Galilée j'avais commencé de l'examiner par le menu, et si j'ai du loisir assez je continuerai. Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouvez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avais dessein. Je suis, mon révérend Père, votre, etc..

22 octobre 1638.

FERMAT.

QUESTIONS PROPOSÉES

44. — On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées. D'un point P, dont les coordonnées sont $(\alpha\beta)$ on abaisse des normales sur ces coniques. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales. En désignant par $2a$ la longueur de la diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en P, et que l'équation de cette courbe est

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2(\alpha - x)(\beta - y)$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy\{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2\} = 0$$

On construira cette courbe, et on distinguera les différentes formes, suivant que le point P est situé dans l'une ou l'autre des régions du plan définies par les quatre côtés du carré supposés prolongés indéfiniment.

Enfin, on distinguera sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles du faisceau considéré. *(G. L.)*

45. — On considère un point m dont les coordonnées sont x et y ; à ce point on fait correspondre un point M dont les coordonnées X et Y sont liées à x et y par les formules

$$x = X;\; yY = a^2.$$

On propose d'étudier cette transformation ; on établira en particulier les points suivants :

1. A une courbe f, d'ordre p, correspond également une courbe F, d'ordre $2p$; mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité k, l'ordre de F n'est plus que $2p - k$.

2. Les tangentes aux courbes f et F aux points correspondants m et M rencontrent Ox en deux points équidistants du pied de l'ordonnée.

3. Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue.

4. Étudier les cubiques de la troisième classe,

$$x^2y = m^3,$$

en les considérant comme des transformées de la parabole ; montrer en particulier que, si l'on appelle P le pied de l'ordonnée en un point M de cette cubique, et T le point de rencontre de la tangente en M avec Ox, on a

$$OT = \frac{3}{2} OP.$$

5. Déduire de cette transformation et de la théorie des asymptotes qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt. *(G. L.)*

46. — Lorsque les trois premiers coefficients d'une équa-

tion de degré m sont $1, p, \frac{p(p+1)}{2}$,

l'équation a des racines imaginaires. (G. L.)

47. — Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont $A, B, C, 2B - A, 2C - B$,

l'équation a des racines imaginaires. (G. L.)

48. — Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $+3A, -A, -A, +3A$,

l'équation a des racines imaginaires. (G. L.)

49. — On donne un cercle Δ, et un diamètre OC de ce cercle ; d'un point A, pris sur la circonférence, on abaisse sur OC la perpendiculaire AB, et l'on considère le triangle OAB ;

1° On demande le lieu des centres des cercles tangents aux droites OA, AB, OB ; 2° ce lieu se compose de deux quartiques unicursales ; considérant l'une d'entre elles, on demande de distinguer sur cette courbe, formée de deux boucles égales, les points qui appartiennent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits du triangle AOB ; 3° déterminer le cercle qui ayant pour centre le point O, est bitangent à la courbe ; 4° trouver l'aire totale de la courbe.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 286-3.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Fontanes.

Soit $P = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a$ un polynôme réel.

Je suppose que la relation linéaire

$$\alpha a_p + \beta a_{p-1} + \gamma a_{p-2} + \ldots + \delta a_{p-r} = 0$$

soit vérifiée pour deux valeurs consécutives de p; p et $p - 1$. Si l'équation $Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \delta x^r = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $P = 0$ a deux racines imaginaires au moins.

En effet, en multipliant P par Q, on obtient un polynôme présentant une lacune de deux termes, les coefficients de x^p et x^{p-1} étant nuls. Le produit PQ a deux racines imaginaires, qui existent donc dans P, puisque φ par hypothèse a ses racines réelles.

Par exemple : 1° si trois termes consécutifs de P sont en progression géométrique de raison r, la relation est à deux termes

$$a_p - r a_{p-1} = 0;$$

le polynôme Q est $1 - rx$. C'est le théorème de M. Hermite.

2° Si quatre termes sont en progression arithmétique dans P, la relation linéaire est

$$a_p - 2a_{p-1} + a_{p-2} = 0;$$

le polynôme Q est $1 - 2x + x^2$, il a ses racines réelles; P en a deux imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont pris dans la suite de Lamé 1, 2, 3, 5,... la relation linéaire est

$$a_p + a_{p-1} - a_{p-2} = 0;$$

le polynôme Q est $1 + x - x^2$; ses racines sont réelles, l'équation P a deux racines imaginaires.

4° Si quatre termes sont s_r, s_{r+1}, s_{r+2}, s_{r+3} somme des puissances semblables des racines réelles d'une équation du second degré, la relation linéaire a pour coefficients les coefficients de cette équation ; P a deux racines imaginaires, etc.

On peut généraliser pour le cas où la relation linéaire a

lieu pour n valeurs de p; la lacune est de n termes et les racines imaginaires du produit signalées par la lacune appartiennent à P ou à Q. Si elles ne peuvent être introduites par le facteur Q, c'est que P en admettait.

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 3).

Soient J_c, J_b, J_a les symétriques de C, de B et de A par rapport au centre du cercle inscrit; J_c et J_b sont les centres des hyperboles (1) et (2) qui passent par A′ et ont pour asymptote commune la droite J_cJ_b tangente au cercle inscrit et parallèle à BC et pour autre asymptote respectivement J_cJ_a et J_bJ_a.

Si l'on joint J_aA' coupant J_bJ_c en T et que l'on prenne dans le sens TA′, $T\Theta_1 = J_aA'$, le point Θ_1, construit ainsi très simplement, sera évidemment le point cherché commun aux deux hyperboles d'après le théorème connu : les segments interceptés sur une droite entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égaux.

En construisant par rapport aux autres côtés les droites analogues à J^aA', on a le théorème suivant.

Théorème III. — *Si dans un triangle* ABC *on joint le point symétrique de chaque sommet par rapport au centre du cercle inscrit au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé à ce sommet, on a trois droites qui se coupent en un même point; si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, ces parallèles coupent les côtés en six points qui forment un hexagone circonscrit au cercle inscrit dans le triangle.*

En appelant l_1, l_2, l_3 les longueurs de ces parallèles comprises entre les côtés on peut démontrer que :

L'on peut toujours former un triangle avec les longueurs

l_1, l_2, l_3, et aussi établir les formules

$$a = p - \sqrt{p^2 - 2l_1 p}$$

$$p = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2}+\sqrt{l_3})^2(\sqrt{l_2}+\sqrt{l_3}-\sqrt{l_1})^2(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_3}-\sqrt{l_2})^2(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2}-\sqrt{l_3})^2}{(l_2+l_3-l_1)(l_1+l_3-l_2)(l_1+l_2-l_3)}$$

ce qui donne la solution de ce problème: *Construire un triangle connaissant les trois longueurs* l_1, l_2, l_3.

Les cercles ex-inscrits donnent lieu à des constructions, à des formules, à des théorèmes et à des problèmes tout à fait analogues. On obtient ainsi les points $\Theta_a, \Theta_b, \Theta_c$, analogues à Θ_1.

En calculant leurs coordonnées on trouve

$$\Theta_a \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p+b-c)}{p-a} \\ y = -\dfrac{b(a+p)}{p-a} \end{array} \right. \qquad \Theta_b \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p+b)}{p-b} \\ y = \dfrac{b(p+a-c)}{p-b} \end{array} \right.$$

$$\Theta_c \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p+b-a)}{p-c} \\ y = \dfrac{b(p+a-b)}{p-c} \end{array} \right.$$

ou
$$\Theta_1\Theta_a = \frac{4a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Theta_b\Theta_c = \frac{4c}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Theta_1\Theta_a \times \Theta_1\Theta_b \times \Theta_1\Theta_c = 2^{10}R^2 r.$$
$$\Theta_b\Theta_c \times \Theta_a\Theta_c \times \Theta_a\Theta_b = 2^{10}R^2 p$$
$$\Theta_1\Theta_a \times \Theta_b\Theta_c = 2^6 aR$$

La surface de $\Theta_a\Theta_b\Theta_c = 2^5 p.R$

Si l'on ajoute les deux égalités qui donnent les coordonnées de Θ_a, on a $x + y = -(a+b)$: le point Θ_a est donc sur cette droite.

Si l'on retranche les deux égalités qui donnent les coordonnées de Θ_c on trouve $y - x = a - b$.

Le point Θ_c est donc sur cette droite qui contient déjà le point Θ_1.

Enfin si l'on cherche le coefficient angulaire de $\Theta_a\Theta_b$, on

trouve — 1. Ce qui prouve que cette droite est parallèle à la bissectrice du supplément de l'angle BCA.

Ces dernières remarques permettent d'énoncer le théorème suivant.

Théorème IV. — *Soit un triangle* ABC; *sur* CB *et dans le sens* BC *je prends* $CC_\alpha = a + b$; *sur* CA *et dans le sens* AC *je prends* $CC_\beta = a + b$; *je joins* $C_\alpha C_\beta$ *et je construis les deux droites analogues* $B_\alpha B_\gamma$ $A_\gamma A_\beta$. *Ces trois droites forment un triangle* $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ *dont le point de concours des hauteurs est* Θ_1. *Si par l'un des points* Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c, *je mène des parallèles aux trois côtés de* ABC, *ces parallèles couperont ces côtés en six points qui formeront un hexagone circonscrit au cercle inscrit ou à l'un des cercles ex-inscrits du triangle* ABC.

Remarque. — Les trois côtés et les trois hauteurs du triangle $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les directions des côtés de ABC.

Le rayon du cercle circonscrit au triangle $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ est 8R.

Le théorème III transformé donne le théorème plus général:

Théorème V. — *Si deux triangles homologiques* ABC, A'B'C' *quelconques sont circonscrits à une même conique, les points de contact de* ABC *avec la conique étant* α, β, γ *et ceux de* A'B'C' *étant* $\alpha'\beta'\gamma'$, *les triangles* A'B'C', $\alpha\beta\gamma$ *sont homologiques ainsi que* ABC *et* $\alpha'\beta'\gamma'$.

Remarquons qu'on pourrait résoudre par une méthode tout à fait analogue le problème suivant plus général que celui que nous venons d'étudier.

Problème II. — *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC *un point* Θ *tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux trois côtés, l'hexagone formé par les six points où ces parallèles coupent les côtés soit circonscrit à une conique donnée inscrite dans le triangle* ABC.

Problème III. — *Soit* Θ *un point quelconque* (ξ, η) *du plan. On sait que l'hexagone* $B_cA_cC_aB_aA_bC_b$ *(avec les mêmes notations que dans le problème 1) est circonscriptible à une conique et inscriptible dans une autre; cherchons l'équation de ces courbes.*

1° La conique inscrite à l'hexagone :

Toute conique tangente à CB, CA a une équation de la forme

$$D^2x^2 + 4FBxy + E^2y^2 + 4FDx + 4FEy + 4F^2 = 0. \quad (3)$$

Exprimons qu'elle est tangente aux droites C_bA_b, C_aB_a, A_cB_c qui ont respectivement pour équations

$$b\eta x + (2a\eta + b\xi - ab)y - \eta(a\eta + b\xi) = 0, \quad (4)$$

$$(a\eta + 2b\xi - ab)x + a\xi y - \xi(a\eta + b\xi) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} - 1 = 0. \quad (6)$$

Or si la droite $mx + ny + p = 0$ est tangente à la conique $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D, & m \\ B, & 2C, & E, & n \\ D, & E, & 2F, & p \\ m, & n, & p, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui donne pour la conique (3)

$$p^2(E^2D^2 - 4F^2B^2) + 4pnFD(2FB - ED) + 4pmFE(2FB - ED) - 8mnF^2(2FB - ED) = 0$$

ou en enlevant le facteur $2FB - ED$, divisant par F^2p^2 et posant $\frac{E}{F} = X$, $\frac{D}{F} = Y$, $\frac{E}{F} \times \frac{D}{F} + 2\frac{B}{F} = Z$, on a

$$4\frac{m}{p}X + 4\frac{n}{p}Y - Z = 8\frac{m}{p}\frac{n}{p}.$$

Si dans cette équation on remplace $\frac{m}{p}$ et $\frac{n}{p}$ par leurs valeurs tirées respectivement des équations (4), (5), (6), il vient :

$$\frac{4b}{a\eta + b\xi}X + \frac{4(2a\eta + b\xi - ab)}{\eta.(a\eta + b\xi)}Y + Z = \frac{-8b(2a\eta + b\xi - ab)}{\eta.(a\eta + b\xi)}$$

$$\frac{4(a\eta + 2b\xi - ab)}{\xi(a\eta + b\xi)}X + \frac{4a}{a\eta + b\xi}Y + Z = \frac{-8a(a\eta + 2b\xi - ab)}{\xi(a\eta + b\xi)}$$

$$\frac{4}{\xi}X + \frac{4}{\eta}Y + Z = -\frac{8}{\xi.\eta}.$$

De ces trois équations on déduit

$$\frac{E}{F} = X = -\frac{2(\xi + a)}{a\eta + b\xi}$$

$$\frac{D}{F} = Y = -\frac{2(\eta + b)}{a\eta + b\xi}$$

$$\frac{E}{F} \cdot \frac{D}{F} + 2\frac{B}{F} = Z = \frac{16}{a\eta + b\xi},$$

d'où
$$\frac{B}{F} = \frac{6a\eta + 6b\xi - 2ab - 2\eta\xi}{(a\eta + b\xi)^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (3) préalablement divisée par F^2.

On a

$$(\eta + b)^2x^2 + 2(3a\eta + 3b\xi - ab - \xi\eta)xy + (\xi + a)^2y^2$$
$$-2(\eta + b)(a\eta + b\xi)x - 2(\xi + a)(a\eta + b\xi)y + (a\eta + b\xi)^2 = 0 \quad (7)$$

qui est l'équation cherchée de la conique inscrite dans l'hexagone.

Si l'on détermine le centre de cette conique on reconnaît qu'il est donné par

les équations
$$\begin{cases} x = \dfrac{a + \xi}{4} \\ y = \dfrac{b + \eta}{4}. \end{cases}$$

Ce qui conduit au remarquable théorème suivant :

Théorème VI. — *Si dans le plan d'un triangle* ABC *un point* Θ *décrit une courbe quelconque, le centre de la conique inscrite dans l'hexagone formé par les intersections des côtés avec les parallèles aux côtés menées par* Θ *décrit une courbe homothétique et le rapport d'homothétie est* $\frac{1}{4}$.

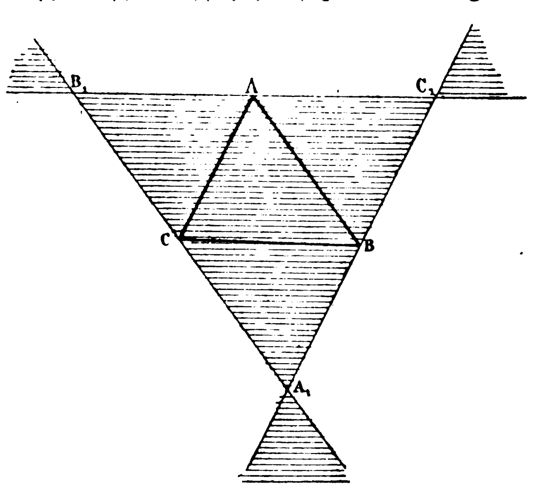
Remarque I. — Ces valeurs des coordonnées du centre nous indiquent une nouvelle solution très simple du problème I car nous connaissons dans ce problème les centres des coniques inscrites qui sont les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC. En remplaçant x et y par les coordonnées de ces points nous aurons les coordonnées ξ, η des points Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c par les formules

$$\xi = 4x - a$$
$$\eta = 4y - b$$

et nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par une voie toute différente.

Remarque II. — La courbe (7) ne représente jamais une hyperbole équilatère.

Remarque III. — Si nous cherchons le genre de la courbe, nous voyons qu'elle représente une hyperbole ou une ellipse suivant que l'on a $(\eta - b)(a - \xi)(a\eta + b\xi)$, positif ou négatif. Si l'on mène par A, B, C des parallèles aux côtés opposés, on forme un triangle A_1 B_1 C_1 et il est facile de voir que l'invariant $(\eta - b)$ $(a - \xi)(a\eta + b\xi)$ est négatif ou positif suivant que le point (ξ, η) est ou n'est pas dans les parties hachurées de la figure ci-contre. Si le point (ξ, η) se trouve sur un des côtés du triangle A_1 $B_1 C_1$, la courbe (7) se réduit à une droite double.



2° La conique circonscrite à l'hexagone :

On exprime facilement que la conique passe par les quatre points B_c, C_b, A_c, C_a situés sur les axes de coordonnées, puis par l'un des points A_b, B_a qui ont pour coordonnées :

$$A_b \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{b}(b - \eta) \\ y = \eta \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} y = \xi \\ x = \frac{b}{a}(a - \xi) \end{array} \right.$$

on trouve

$$b\eta x^2 + (2a\eta + 2b\xi - ab)xy + a\xi y^2 - \eta(2b\xi + a\eta)x$$
$$-\xi(2a\eta + b\xi)y + \eta\xi(a\eta + b\xi) = 0. \qquad (8)$$

a, Cette équation représente une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le point (ξ, η) est à l'intérieur de l'ellipse maxima inscrite au triangle, sur cette ellipse où à l'extérieur de cette ellipse. On sait que cette ellipse maxima

est tangente aux trois côtés en leurs milieux et a pour centre le centre de gravité du triangle ; son équation est

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^2 - ab^2x - a^2by + \frac{a^2b^2}{4} = 0. \quad (9)$$

b, La conique circonscrite à l'hexagone sera un système de deux droites si le point (ξ, η) est sur l'ellipse minima circonscrite à ABC. Cette ellipse minima, qui a son centre au centre de gravité de ABC et dont les normales aux points A, B, C sont les hauteurs du triangle, a pour équation

$$abxy - (ay + bx)(ay + bx - ab) = 0. \quad (10)$$

L'ellipse (9) et l'ellipse (10) sont homothétiques, leur centre d'homothétie est le centre de gravité G de ABC.

Le lieu d'intersection des deux droites qui, dans ce cas, forment la conique circonscrite à l'hexagone, est

$$[(ay + bx)(ay + bx - ab) + abxy]^2$$
$$= 4abxy\,(ay + bx - ab)^2.$$

c, La conique circonscrite est un cercle lorsque le point (ξ, η) est le centre des médianes antiparallèles. *(Voir la note sur quelques propriétés d'un point remarquable du plan d'un triangle, Congrès de Lyon, 1873.)*

Théorème VII. — *Soit un triangle fixe* ABC *et un triangle variable* A'B'C', *homothétique à* ABC, ω *étant le centre fixe d'homothétie, on sait que les côtés de* A'B'C' *coupent ceux de* ABC *en six points qui forment un hexagone inscriptible à une conique.* (Voir Congrès de Lyon, 1873.)

1° Le lieu du centre de cette conique est une droite qui passe par ω ; *si* ω *est le centre des médianes antiparallèles de* ABC, *la droite passe aussi par le centre du cercle circonscrit.*

2° Les côtés de cet hexagone qui sont situés sur les côtés du triangle ABC *coupent (d'après le théorème de Pascal) les côtés opposés en trois points situés en ligne droite; cette droite passe par un point fixe.*

La conique circonscrite à l'hexagone est une hyperbole équilatère si le point (ξ, η) appartient à la droite :

$$2a\eta\,(c^2 - a^2) + 2b\xi\,(c^2 - b^2) + ab\,(a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

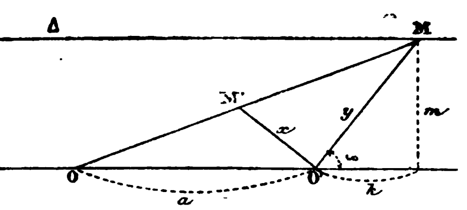
Il est facile de voir que cette droite est l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle formé en joignant les pieds

des hauteurs, c'est-à-dire l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points; on a donc le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si par un point quelconque de l'axe d'homologie d'un triangle* ABC *et du triangle formé par les pieds des hauteurs, on mène des parallèles aux trois côtés, ces parallèles rencontrent les côtés en six points qui sont sur une hyperbole équilatère.* *(A suivre.)*

QUESTION 35

La question étant posée dans les mêmes termes que dans la question 34, mais en supposant cette fois que Δ *est parallèle à* OO′, *trouver le lieu du point* I *; on distinguera les différentes formes du lieu suivant que le cercle décrit sur* OO′ *comme diamètre est extérieur, tangent ou sécant à la droite* Δ. *On propose aussi de reconnaître que la courbe trouvée est une courbe de sixième degré unicursale.*



1. — Supposons maintenant que la droite Δ soit parallèle à OO′. L'équation de cette droite est $m = y \sin\omega$ [1]. La relation précédente est toujours $\frac{\sin\omega}{x} - \frac{\cos\omega}{y} = \frac{1}{a}$ [2]. Éliminant l'angle ω, on a $\sin\omega = \frac{m}{y}$, $\frac{\cos\omega}{y} = \frac{m}{xy} - \frac{1}{a}$,

$$\cos\omega = y\left(\frac{m}{xy} - \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right).$$

L'équation de la courbe est donc

$$\frac{m^2}{y^2} + \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right)^2 = 1, \qquad [3]$$

équation que l'on peut écrire $a^2x^2(y^2 - m^2) = y^2(am - xy)^2$.

2. — Discussion. — Cette courbe est du sixième degré, elle est symétrique par rapport à l'origine. Elle est tout entière extérieure aux deux droites $\begin{matrix} y = (+m) \\ y = (-m) \end{matrix}$ parallèles à l'axe des x, et auxquelles elle est tangente aux points M et M′ donnés par les coordonnées

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = a \\ y = m \end{cases} \quad \mathrm{M}'\begin{cases} x = -a \\ y = -m \end{cases} \qquad [4]$$

L'axe des y est une asymptote double. Les asymptotes horizontales sont données par le coefficient de x^2

$$(y^4 - a^2y^2 + a^2m^2) = 0,$$

qui représente quatre asymptotes réelles ou imaginaires suivant le signe de $(a^2 - 4m^2)$. Nous distinguerons trois cas.

1° $\frac{a^2}{4} - m^2 > 0$. Les quatre asymptotes sont réelles. Elles sont symétriques deux à deux par rapport à l'axe des x. Posant $\frac{a^2}{4} - m^2 = d^2$, on aura $y^2 = a\left(\frac{a}{2} \pm d\right)$, valeurs que l'on peut facilement construire *(fig. 1)*. On obtient les quatre points A A_1 A′ A_1'.

Nous pouvons écrire l'équation en ordonnant par rapport à x^2 : $x^2(y^4 - a^2y^2 + a^2m^2) = 2amy^2\left(xy - \frac{am}{2}\right)$. [5]

Le premier membre contient les quatre asymptotes, le second l'hyperbole $xy = \frac{a}{2}m$, qui séparent le plan en régions *(fig. 1, hachures croisées)*.

Les points d'intersection P, P′, Q, Q′ de l'hyperbole avec les asymptotes font partie de la courbe. L'origine est un point double isolé.

Il y a deux branches de courbe comprises entre les asymptotes AA′ et A_1A_1', et deux branches asymptotes à Oy et aux droites A et A_1.

2° $\frac{a^2}{4} - m^2 = 0$. L'équation se simplifie et devient

$$x^2\left(y^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2y^2\left(xy - \frac{a^2}{4}\right).$$

Les deux asymptotes horizontales A et A′ sont confondues en une seule A ayant pour équation $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

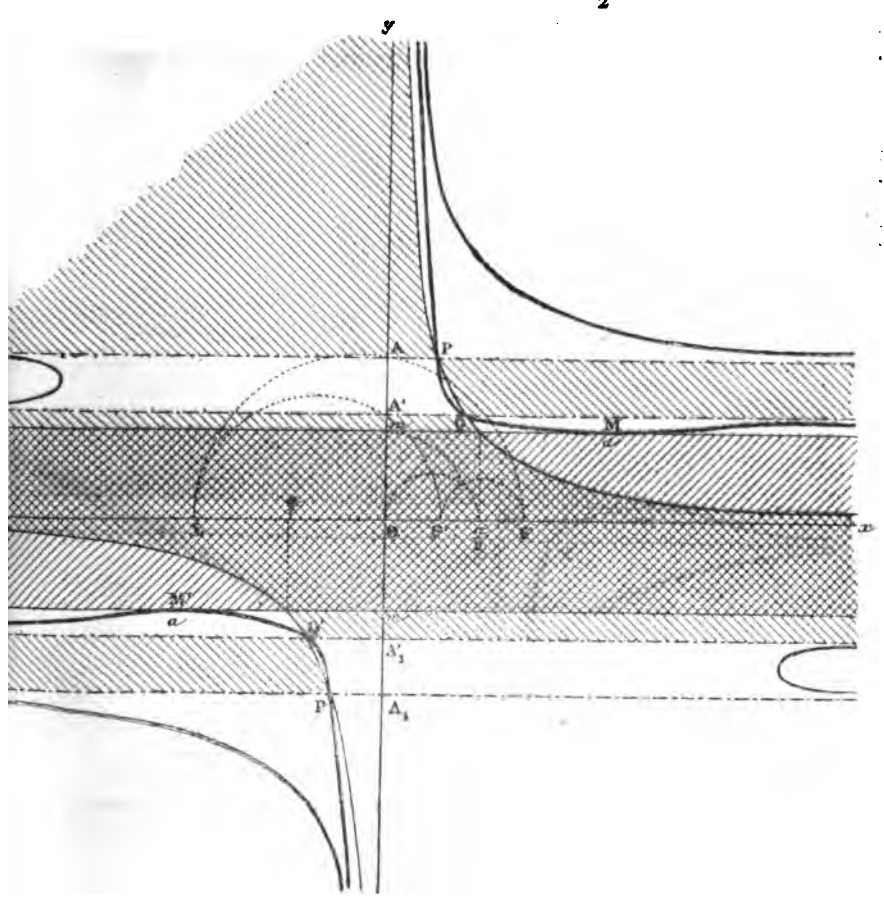


Fig. 1.

L'hyperbole équilatère $xy = \frac{a^2}{4}$ et la courbe coupent les deux asymptotes A et A_1 aux mêmes points P et P′; par conséquent la courbe est tangente en ces points à l'hyperbole équilatère.

Les deux points M $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ M′ $\begin{cases} x = -a \\ y = -\dfrac{a}{2} \end{cases}$ sont deux points de tangence horizontale. Il y a quatre branches symétriques deux à deux par rapport à l'origine O, qui est

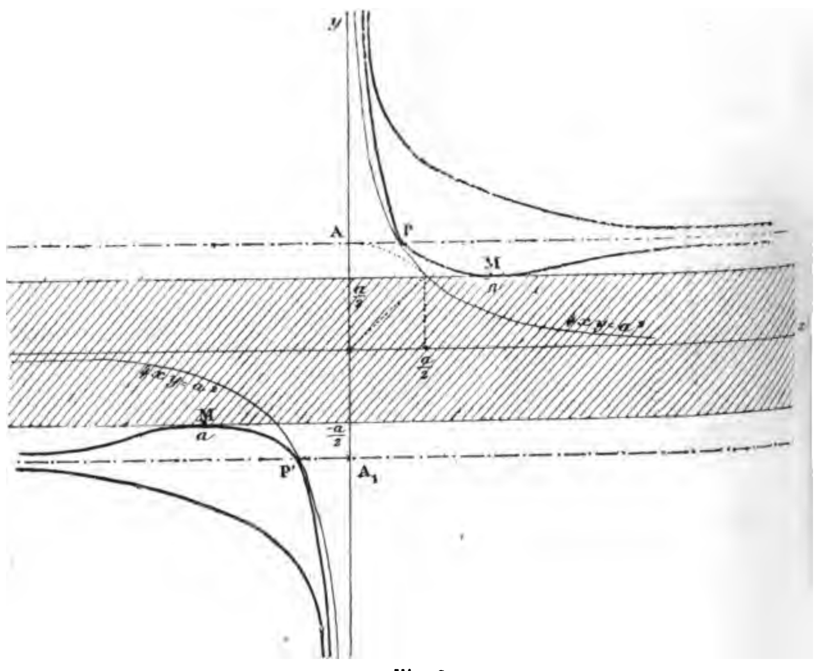


Fig. 2.

un point double isolé. L'axe des y est une asymptote double (*fig. 2*).

3° $\dfrac{a^2}{2} - m^2 \leq 0$. Les asymptotes horizontales sont toutes imaginaires. Il faut que x et y soient de même signe, donc il n'y a des points que dans ces premier et troisième quadrants.

Les points M et M′ sont toujours deux points de tangence horizontale. L'axe des y est une asymptote double.

La courbe a donc la forme de la figure 3. Il y a un point

d'inflexion dans la partie de courbe qui va de M vers la droite à l'axe Oy et un point N où la tangente est verticale.

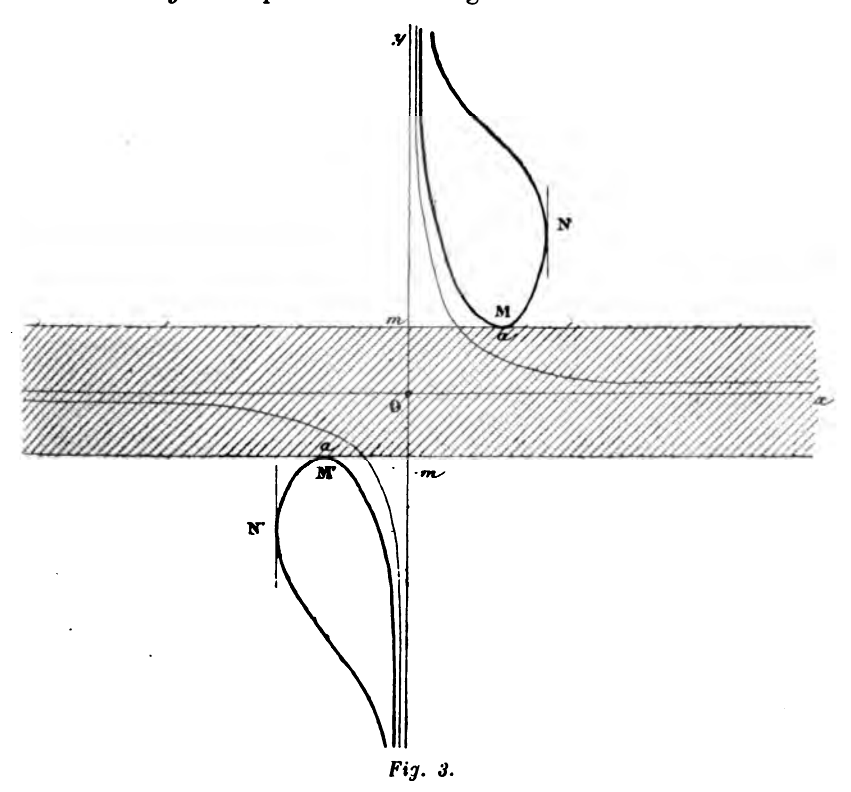


Fig. 3.

3. — 1° Prenons l'équation de la première courbe sous la forme

$$\frac{k^2}{y^2} \times x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right)^2 = 1.$$

On peut poser $\dfrac{k}{y} = \cos \varphi = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right) = \sin \varphi = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

d'où on aura les formules

$$y = \frac{k\ (t^2 + 1)}{t^2 - 1} \qquad [1]$$

et

$$x = \frac{2t}{(t^2+1)\left[\frac{1}{a} + \frac{(t^2-1)^2}{k(t^2+1)^2}\right]} = \frac{2tak(t^2+1)}{k(t^2+1)^2 + a(t^2-1)^2}. \qquad [2]$$

Ces deux formules prouvent que la première courbe est unicursale.

2° Prenons la deuxième sous la forme

$$1 = \left(\frac{m}{y}\right)^2 + \left(\frac{m}{x} - \frac{y}{a}\right)^2$$

et posant $\frac{m}{y} = \cos\varphi = \frac{t^2-1}{t^2+1}$

$$\frac{m}{x} - \frac{y}{a} = \sin\varphi = \frac{2t}{t^2+1},$$

On aura $y = m\frac{t^2+1}{t^2-1}$ [1]

et

$$\frac{m}{x} = \frac{2t}{t^2+1} + \frac{m}{a} \cdot \frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{2at(t^2-1)+m(t^2-1)^2}{a(t^4-1)}$$

d'où $x = \frac{am(t^2-1)}{2at(t^2-1)+m(t^2+1)^2}$. [2]

La courbe est donc unicursale.

Cette remarque s'applique d'ailleurs à la courbe traitée précédemment quand nous avons résolu la question n° 34. On peut observer qu'en général, si

$$x = f(\sin\omega, \cos\omega),$$
$$y = \varphi(\sin\omega, \cos\omega);$$

comme on a toujours

$$\cos\omega = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$
$$\sin\omega = \frac{2t}{t^2+1},$$

x et y sont données par des formules

$$x = \frac{F(t)}{F_1(t)} \quad y = \frac{F_2(t)}{F_1(t)}$$

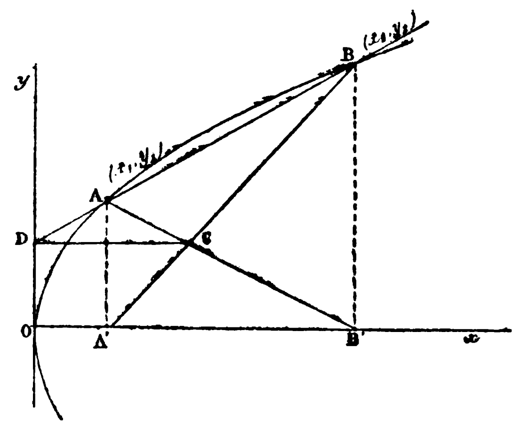
et par conséquent ces courbes sont unicursales.

QUESTION 13

Solution par M. E. GAULLAIDER, élève au Lycée Saint-Louis.

Étant donnés deux points A et B d'une parabole inconnue et la droite Δ axe de cette courbe, on abaisse sur Δ les perpendiculaires AA', BB', puis on trace les droites AB' et BA' qui se coupent en C.

Démontrer que si par le point C on mène une parallèle à l'axe Δ, cette droite rencontre AB en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet.



(G. L.)

Équation de AB' : $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1}{x_1 - x_2}$,

ou $y(x_1 - x_2) - xy_1 + x_2y_1 = 0$.

Équation de BA' : $y(x_1 - x_2) + xy_2 - x_1y_2 = 0$.

L'équation d'une droite passant par C est

$$y(x_1 - x_2)(\lambda + 1) - x(y_1 - \lambda y_2) + y_1x_2 - \lambda x_1y_2 = 0 \quad (1)$$

Si cette droite est parallèle à Ox, on a $y_1 - \lambda y_2 = 0$,

d'où
$$\lambda = \frac{x_1}{y_2},$$

et (1) devient $y(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + y_2y_1x_2 - x_1y_2y_1 = 0$

ou
$$y = \frac{y_1y_2}{y_1 + y_2};$$

cherchons son point d'intersection avec AB dont l'équation

est
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x - x_2},$$

nous avons

$$(x - x_1)(y_1^2 - y_2^2) + (x_1 - x_2)\, y_1^2 = 0$$

ou $$x(y_1^2 - y_2^2) + x_1y_2^2 - x_2y_1^2 = 0; \qquad (2)$$

mais $$y_1^2 = 2p\, x_1,\ y_2^2 = 2px_2,$$

donc (2) devient

$$x(2px_1 - 2px_2) + 2px_1x_2 - 2px_1x_2 = 0$$
$$x = 0.$$

Donc le point D d'intersection avec AB est sur la tangente au sommet; le sommet est donc le pied de la perpendiculaire abaissée du point D sur l'axe.

QUESTION 30

On considère l'équation du quatrième degré,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 *les racines de cette équation* : 1° *on propose de démontrer que si l'on pose*

$$z = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)},$$

l'équation transformée est

$$Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0;$$

en posant

$$P = CBD - B^2E - D^2A,$$
$$Q = 2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3,$$
$$R = BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A,$$
$$S = 4ACE - B^2E - D^2A.$$

2° *Expliquer le résultat qu'on obtient quand on suppose* $C = 0$.

3° *Démontrer que si l'on considère le faisceau quartique*

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$

ces quatre droites formeront un faisceau harmonique si l'on a

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A.$$

(G. L.)

1. Cherchons d'abord la résolvante qui correspond à l'inconnue y, liée aux racines de l'équation donnée par la condition $$y = x_1x_2 + x_3x_4.$$

L'équation étant

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o,$$

la résolvante sera

$$y^3 + py^2 + qy + r = o,$$

et nous allons déterminer p, q et r. On a d'abord

$$-p = \Sigma x_1 x_2$$

ou

$$-p = \frac{C}{A}. \quad (1)$$

Le coefficient q est donné par la relation

$$q = \Sigma(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)$$

ou

$$\begin{aligned} q = {} & x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_4 \\ & + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4 \\ & + x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4 \\ & + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_3 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$q = \Sigma x_1^2(x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4);$$

mais on a d'autre part

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 + x_1(x_2 + x_3 + x_4) = \frac{C}{A}$$

ou

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 - x_1\left(x_1 + \frac{B}{A}\right) = \frac{C}{A}.$$

Ainsi $\quad q = \sum x_1^2\left[\frac{C}{A} + x_1\left(x_1 + \frac{B}{A}\right)\right]$

ou encore $\quad Aq = \Sigma\,(Ax_1^4 + Bx_1^3 + Cx_1^2)$

d'ailleurs $\quad \Sigma(Ax_1^4 + Bx_1^3 + Cx_1^2 + Dx_1 + E) = o.$

On trouve ainsi $\quad Aq = -\Sigma\,(Dx_1 + E)$

ou enfin $\quad A^2q = BD - 4AE. \quad (2)$

Cherchons enfin le coefficient r. On a

$$-r = (x_1x_2 + x_3x_4)\,(x_1x_3 + x_2x_4)\,(x_1x_4 + x_2x_3).$$

En développant les calculs

$$-r = x_1x_2x_3x_4\Sigma x_1^2 + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2,$$

ou

$$-r = \frac{E}{A}\,\Sigma x_1^2 + \frac{E^2}{A^2}\,\Sigma\,\frac{1}{x_1^2}.$$

D'ailleurs $\quad \Sigma x_1^2 = \dfrac{B^2 - 2AC}{A^2}$

et $\quad \Sigma\,\dfrac{1}{x_1^2} = \dfrac{D^2 - 2CE}{E^2}.$

On a donc enfin

$$-A^2 r = B^2E + D^2A - 4ACE. \qquad (3)$$

La résolvante est donc

$$A^3y^3 - A^2Cy^2 + A\ (BD - 4AE)y + 4ACE - B^2E - D^2A = 0. \qquad (4)$$

2. — Cherchons maintenant la relation qui existe entre y et z.

On a
$$z = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)};$$

par suite

$$1 + \frac{1}{z} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}{x_1x_2 + x_3x_4}$$

ou
$$Ay = \frac{Cz}{1 + z}.$$

L'équation (4) devient donc

$$C^3z^3 - C^3z^2(1 + z) + Cz(1 + z)^2(BD - 4AE) + (1 + z)^3(4ACE - B^2E - D^2A) = 0.$$

En développant les calculs indiqués on a

$$z^3(BCD - B^2E - D^2A) + z^2(2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3) + z(BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A) + 4ACE - B^2E - D^2A = 0. \qquad (5)$$

C'est bien l'équation indiquée.

3. — On sait que l'on peut toujours, par la résolution d'une équation qui est du second degré, faire disparaître le terme du milieu d'une équation du quatrième degré. Supposons donc $C = 0$, c'est-à-dire

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \qquad (A)$$

ou
$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 = 0.$$

Ainsi, dans cette hypothèse $C = 0$ on a

$$z + 1 = 0.$$

Mais la relation (A) est symétrique, et l'on peut déduire de cette remarque que les trois racines de l'équation en z sont toutes les trois égales à -1. C'est ce qu'il est facile de vérifier puisqu'elle devient, en supposant $C = 0$,

$$(B^2E + D^2A)(z + 1)^3 = 0;$$

elle n'admet pas d'autre racine que $z = -1$.

4. — Considérons maintenant le faisceau quartique

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0.$$

Si l'on coupe ce faisceau par la droite $y = 1$, on obtient l'équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Le faisceau sera harmonique si les points A_1, A_3, A_2, A_4, qui sont situés sur la droite $y = 1$, donnent la relation

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_4} = \frac{A_2A_3}{A_2A_4}$$

ou

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2}$$

$$2(x_3x_4 + x_1x_2) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4). \quad (6)$$

Il résulte de là que $z = \frac{1}{2}$ est une racine de l'équation (5) et en remplaçant z par $\frac{1}{2}$ dans celle-ci on obtient

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A. \qquad (7)$$

C'est bien la relation indiquée.

5. — On peut encore déduire cette condition de l'équation (4), équation à laquelle on est conduit par la méthode de Ferrari.

En effet, pour exprimer que les racines $x_1 x_2, x_3, x_4$ satisfont à la condition (6), on peut observer que celle-ci peut s'écrire

$$3(x_1x_2 + x_3x_4) = \Sigma x_1x_2 = \frac{C}{A}.$$

On a donc $3Ay = C$

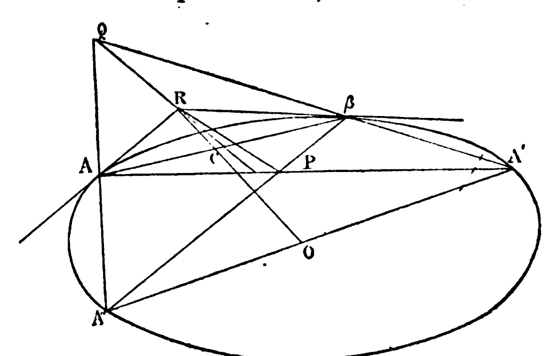
et l'équation (4) donne, en remplaçant Ay par $\frac{C}{3}$, la relation (7) qui se trouve ainsi établie par ces deux procédés.

QUESTION 25

Solution par M. Griffon, commis d'Intendance militaire à Montpellier.

On considère une ellipse E, *un diamètre* A'A″ *et deux points quelconques* A *et* B. *Les droites* AA', BA″ *se coupent en un point* P; AA″ *et* BA' *en un point* Q. *Le pôle de* AB *est évidemment situé sur* PQ. *On propose de démontrer qu'il est placé au milieu de* PQ. (G. L.)

Soit R le pôle de AB; C le milieu de la corde AB. La droite qui va du centre O de la conique E au milieu C de la corde polaire AB passe par le pôle R. Mais dans le quadrilatère complet PQAB A' A″ le milieu des diagonales sont trois points en ligne droite; donc la droite OC, qui joint les milieux de deux diagonales A'A″ et AB, passe par le milieu de la troisième diagonale PQ. Et comme OC rencontre PQ au pôle R de AB, on voit que R est bien le milieu de PQ.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. P. Godefroy, à Lyon; Alexandre, à Angers; H. Bourget, à Aix; Hellot, à Rouen; Cadot, Lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 36

Solution par M. Alexandre, élève de Mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

On considère les ellipses E, *ayant le même centre, leurs axes de direction fixes et homothétiques; par deux points fixes, l'un* A *pris sur* Ox, *l'autre* B *sur* Oy, *de telle sorte que* OA = a, OB = b, *on fait passer des cercles* C *tangents à* E *au point* I. *Trouver le lieu de ce point. Ce lieu est une cubique. On propose de la construire dans le cas particulier où les courbes* E *sont des cercles.* (G. L.)

L'équation de l'une quelconque des ellipses sera

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - K = o\,; \qquad (1)$$

soit $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2 + (\alpha - a)^2$ (2)

un cercle passant par A ; en exprimant qu'il passe par B on a

$$(2\beta - b)\, b - (2\alpha - a)\, a = o. \qquad (3)$$

Soit $x_1\, y_1$ un point qui est sur le cercle ; il se trouve forcément sur l'une des ellipses (1) ; il suffit donc d'exprimer que la tangente en ce point au cercle est parallèle à la polaire de ce point par rapport à l'une quelconque des ellipses,

ce qui donne $$\frac{\mu^2}{\lambda^2}\ \frac{x_1}{y_1} = \frac{\alpha - x_1}{\beta - y_1}. \qquad (4)$$

On aura le lieu cherché en éliminant α, β, entre

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \beta^2 + (\alpha - a)^2 \qquad (5)$$

et les équations (3) et (4). — Ces deux dernières donnent α et β, qui portées dans (5) donnent le lieu cherché

$$(x^2 + y^2 - a^2)(a\mu^2 x - b\lambda^2 y) - 2xy(\lambda^2 - \mu^2)(bx + ay - ab)$$
$$+ (a^2 - b^2)(\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \mu^2 ax) = o.$$

Si on suppose que les courbes données E sont des cercles, $\lambda = \mu$, et le lieu devient

$$(x^2 + y^2 - a^2)(ax - by) + (a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - ux) = o.$$

C'est cette courbe qu'il faut construire.

Nous supposerons $a > b$. On voit aisément que la courbe passe par l'origine où sa tangente est

$$y = \frac{2a^2 - b^2}{ab} x;$$

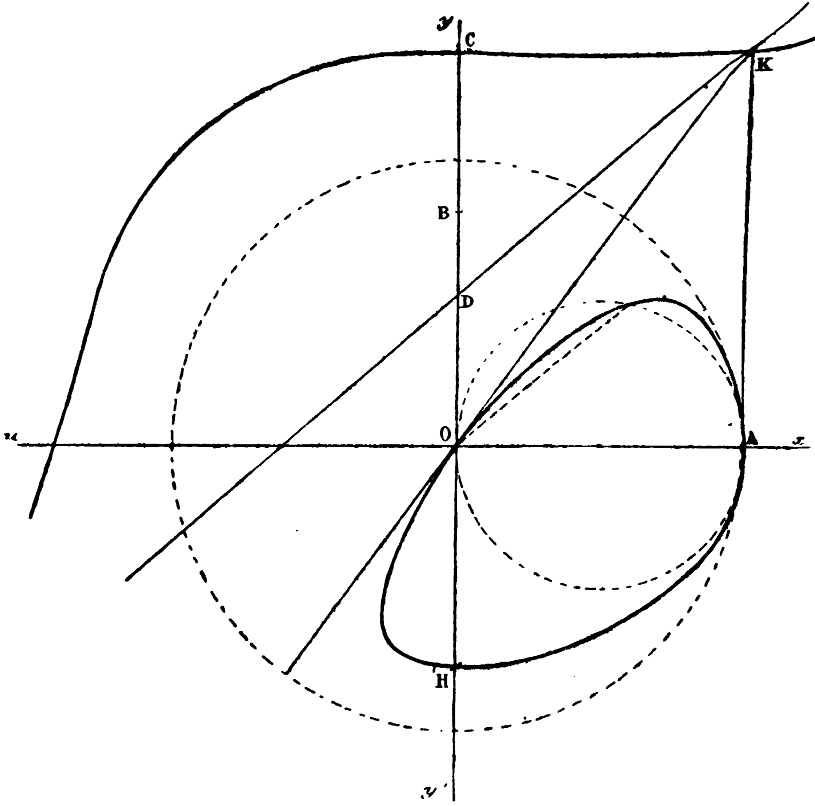
et par le point d'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Elle est tangente aux deux cercles

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

au point $x = a$ où ils sont tangents.



La courbe coupe sa tangente à l'origine au point où celle-ci rencontre la droite $x = a$.

On a une asymptote

$$ax - by + a^2 - b^2 = 0$$

qui passe aussi par le point de rencontre de la tangente à l'origine et de $x = a$.

La courbe a donc la forme de la figure ci-contre. On a

$$OH = -b,\ OC = \frac{a^2}{b},\ OD = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Si $a = b$, la courbe se réduit à un cercle et une droite

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
$$ax - by = 0.$$

Pour étudier le cas de $a < b$, il suffirait de prendre pour axe des x l'axe des y et inversement; on aurait une courbe ayant une disposition analogue par rapport aux nouveaux axes de coordonnées.

QUESTIONS PROPOSÉES

50. — Si par un point de la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 = A,$$

on mène les tangentes, démontrer que, des quatre autres points de contact, deux sont réels et deux sont imaginaires. Démontrer que les points de contact réels ne peuvent avoir en même temps leurs coordonnées commensurables.

(Ed. Lucas.)

51. — On considère une conique à centre Δ; soit S l'un des sommets de cette courbe, et AB une corde principale. On trace une parabole P passant par les points A et B, et ayant, elle aussi, le point S pour sommet. Soit I le point de contact de la parabole P avec une droite à la fois tangente à Δ et à P. Lieu de ce point I, quand la corde AB se meut parallèlement à elle-même. *(G. L.)*

52. — L'ellipse qui touche les côtés d'un triangle ABC aux pieds des médianes antiparallèles a pour f oyer les point segmentaux de Brocard. Ces points O et O' sont définis par la relation

$$OAC = OCB = OBA = O'AB = O'BC = O'CA.$$

(E. Lemoine.)

53. — Soient a, b, c, d, quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle. Si l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, l'équation proposée a au moins deux racines imaginaires.

(*Walecki.*)

54. — On suppose que l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles; démontrer que les équations

$$f_1 = U + (x - a)U' = 0$$
$$f_2 = U + 3(x - a)U' + (x - a)^2U'' = 0$$
$$f_3 = U + 7(x - a)U' + 6(x - a)^2U'' + (x - a)^3U''' = 0$$

ont aussi, quel que soit a, toutes leurs racines réelles (a est réel, bien entendu, et U', U'', U''' sont les dérivées successives de U).

Donner l'expression générale de $f_n = 0$, et montrer que, en posant $f_n = \alpha_n^0 U + \alpha_n^1 U' + \alpha_n^2 U'' + \dots$

on a $\alpha^0 = 1$,

$$\alpha_n^1 = \frac{2^n - 1}{1}$$

$$\alpha_n^2 = \frac{3^n - 2.2^n - 1}{1.2}$$

$$\alpha_n^3 = \frac{4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1}{1.2.3}$$

et ainsi de suite. (*G. L.*)

55. — On fait passer par 6 points fixes d'un plan des cubiques ayant chacune un centre ; déterminer le lieu de ces centres.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2610-3.

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 26.)

Étudions maintenant les lignes qui joignent les sommets aux points de contact des cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Théorème IX. — *Si dans un triangle on joint chaque sommet au point de contact avec le côté opposé du cercle ex-inscrit tangent à ce côté et au prolongement des deux autres, on a trois droites qui se coupent en un même point* ω_1.

C'est-à-dire que les trois droites AA'_a, BB'_b, CC'_c sont concourantes au point ω_1.

Théorème X. — *Si dans un triangle on joint un premier sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle inscrit à ce triangle; puis un deuxième sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle ex-inscrit qui est tangent au côté opposé au troisième sommet et au prolongement des deux autres; puis le troisième sommet avec le point de contact sur le côté opposé du cercle ex-inscrit qui est tangent au côté opposé au deuxième sommet et au prolongement des deux autres, on a trois droites qui se coupent en un même point.*

C'est-à-dire que si l'on prend successivement pour premier sommet les points A,B,C, on a trois faisceaux de trois droites se coupant en ω_a, ω_b, ω_c.

$$\text{Ainsi} \left\{ \begin{array}{llll} AA' & BB'_c & CC'_b & \text{se coupent en } \omega_a, \\ AA'_c & BB' & CC'_a & \text{— — } \omega_b, \\ AA'_b & BB'_a & CC' & \text{— — } \omega_c. \end{array} \right.$$

Les points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c ont respectivement pour coordonnées

$$\omega_1 \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a(p-b)}{p} = (h_b - 2r)\sin C \\ y = \dfrac{b(p-a)}{p} = (h_a - 2r)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_a \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p-c)}{p-a} = -(2r_a - h_b)\sin C \\ y = \dfrac{pb}{p-a} = (h_a + 2ra)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_b \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{pa}{p-b} = (h_b + 2r_b)\sin C \\ y = -b\dfrac{p-c}{p-b} = -(2r_b - h_a)\sin C \end{array} \right.$$

$$\omega_c \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a(p-b)}{p-c} = -(2r_c - h_b)\sin C \\ y = -\dfrac{b(p-b)}{p-c} = -(2r_c - h_a)\sin C \end{array} \right.$$

Ces équations permettent de faire les remarques suivantes:

1° ω_1 et ω_c appartiennent à la droite $y - x = -a + b$; nous avons vu que les points Θ_1 et Θ_c appartenaient à la droite $y - x = a - b$ symétrique par rapport à C.

2° Les points ω_a, ω_b sont sur la droite $y + x = a + b$; nous avons vu que les points $\Theta_a \Theta_b$ étaient sur la droite $y + x = -(a + b)$ symétrique par rapport à C.

3° ω_1 et Θ_1 sont symétriques par rapport au centre du cercle inscrit

ω_a et Θ_a	id.	au centre du cercle ex-inscrit de rayon	r_a
ω_b et Θ_b	id.	id.	r_b
ω_c et Θ_c	id.	id.	r_c

4° Les droites $\omega_1\omega_c$ et $\omega_b\omega_a$ sont symétriques de $\Theta_1\Theta_c$ et $\Theta_a\Theta_b$, par rapport au sommet C.

De même pour les autres couples de droites.

$\omega_b\omega_a$ se construit donc en prenant sur CB dans le sens CB et sur CA dans le sens CA une longueur égale à $a + b$ et joignant ces deux points; $\omega_c\omega_a$, $\omega_b\omega_c$ se construisent de même, etc.

5° On peut remarquer que $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$, c'est-à-dire AA', BC', CC' se coupent en un même point, tandis qu'il n'en est pas de même de $A\Theta_a$, $B\Theta_b$, $C\Theta_c$.

6° Si l'on calcule $\omega_b\omega_a$, on trouve $\dfrac{2c}{\sin\frac{C}{2}}$, ce qui prouve, puisque $\Theta_b\Theta_a = \dfrac{4c}{\sin\frac{C}{2}}$, que les deux triangles homothétiques $\omega_a\omega_b\omega_c$ et $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$ ont $\frac{1}{2}$ pour rapport d'homothétie.

Théorème XI. — *Si par le point* ω_1 *je mène des parallèles aux trois côtés du triangle* ABC, *chacune de ces parallèles sera à une distance* $2r$ *du sommet opposé au côté auquel elle est parallèle. De même si par* ω_a *on mène des parallèles aux trois côtés, chacune de ces parallèles sera à une distance* $2r_a$ *du sommet opposé auquel elle est parallèle.*

Cette propriété définit complètement les points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c d'une autre manière que celle qui nous les a fait trouver. On en déduit facilement que : *ces points sont les centres des cercles inscrit et ex-inscrit au triangle formé en menant par chaque sommet de* ABC *une parallèle au côté opposé.*

Ces théorèmes permettent de trouver en nombre indéfini des relations entre les éléments des triangles ABC, $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\Theta_a\Theta_b\Theta_c$.

Le théorème XI est un cas particulier du suivant.

Théorème XII. — *D'un point quelconque* ρ *du plan d'un triangle* ABC *j'abaisse* ρa, ρb, ρc, *perpendiculaires respectivement sur* BC, AC, AB. *Sur les hauteurs* AA', BB', CC' *de ce triangle, je prends les trois points* α, β, γ *tels que* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *étant de même sens que* ρa, ρb, ρc, *on ait* $A\alpha = 2\rho a$, $B\beta = 2\rho b$, $C\gamma = 2\rho c$.

Par α *je mène une parallèle à* CB,
— β — AC,
— γ — AB.

Ces trois parallèles se coupent en un point ρ'; *si* ρ *décrit un lieu* $\varphi(x, y) = 0$, ρ' *décrira la courbe* $\varphi\left(\dfrac{a-x}{2}, \dfrac{b-y}{2}\right) = 0$, *Courbe semblable à* $\varphi(x, y) = 0$ *et dont la symétrique par rapport à l'origine est homothétique à* $\varphi(x, y) = 0$.

En projetant sur un plan quelconque on aurait un théorème encore plus général ; les hauteurs seraient remplacées par trois droites partant des sommets et se coupant en un même point, puis les perpendiculaires menées de ρ sur les côtés par des parallèles à ces trois droites.

Théorème XIII. — *Le point* ω_1, *le centre de gravité* G, *le centre du cercle inscrit* o *et le point* Θ_1 *sont en ligne droite ; et l'on a* $\frac{\omega_1 G}{2} = Go = \frac{o\Theta_1}{3}$.

Théorème XIV. — *Si par les points* A'_a, B'_b, C'_c, *où les trois cercles ex-inscrits touchent les côtés et non les prolongements de ces côtés, on élève des perpendiculaires à ces côtés, on a trois droites qui se coupent au même point* V ; *les trois points* V, O, o *sont en ligne droite et l'on a* $VO = Oo$.

La somme des perpendiculaires abaissées de V *sur les trois côtés du triangle est* $2R - r$.

De même si par C'_c, B'_a, A'_b, *on élève des perpendiculaires respectivement aux côtés* AB, AC, BC, *elles se couperont en un point* V_c.

V_c, O *et* o_c *seront en ligne droite et* $Oo_c = OV_c$.

En somme les points V, V_a, V_b, V_c *seront les symétriques de* o, o_a, o_b, o_c *par rapport au centre du cercle circonscrit.*

Théorème XV. — *Soit*

T_1 *l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A'B'C' ;
T_a — — $A'_aB'_aC'_a$;
T_b — — $A'_bB'_bC'_b$;
T_c — — $A'_cB'_cC'_c$.

1° *Le triangle formé par les trois lignes* T_a, T_b, T_c, *a ses sommets sur les bissectrices de* ABC ;

2° T_1 *coupe respectivement* T^a, T^b, T^c *sur la bissectrice du supplément de* A, *de* B, *de* C.

SUR UNE NOUVELLE APPROXIMATION

DES RACINES INCOMMENSURABLES

Par M. **J. Collin**, professeur de Mathématiques, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit $f(x) = 0$ une équation quelconque, et supposons que l'on ait reconnu que cette équation admet une racine simple incommensurable, comprise entre deux nombres déjà bien rapprochés α et β, $\alpha < \beta$.

On peut trouver pour cette racine, par la géométrie, une approximation qui est intéressante à plusieurs points de vue: car 1° elle s'obtient immédiatement lorsqu'on a déjà effectué les calculs nécessaires pour la méthode de Newton et la méthode des parties proportionnelles; 2° elle donne une valeur plus approchée que ces deux méthodes ; 3° elle peut se représenter graphiquement.

Considérons en effet la courbe $y = f(x)$, et appelons A et B les points de cette courbe qui ont pour abscisses respectives α et β. (*). Désignons aussi par A′, B′, D les points où l'axe des x rencontre la tangente en A, la tangente en B, et la corde AB, et par α', β', δ les abscisses de ces points, de sorte que l'on a

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},\quad \beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},\quad \delta = \alpha - \frac{(\beta-\alpha)f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Nous supposons d'ailleurs que la courbe n'offre aucun point d'inflexion entre A et B, d'où il résulte, en particulier, que les deux valeurs α' et β' sont approchées dans le même sens, et δ en sens contraire.

Cela étant,

Parmi toutes les coniques qui touchent la courbe $y = f(x)$ en A et B, se trouve une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des x, et qui, par conséquent, rencontre

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

cet axe en un point unique C. D'après le théorème de Desargues, C est le point central de l'involution dont A' et B' sont deux points conjugués, et D un point double; donc C est compris entre A' ou B' d'une part, et D d'autre part, et son abscisse γ est donnée par la relation

$$(\gamma - \delta)^2 = (\alpha' - \gamma)(\beta' - \gamma),$$

d'où

$$\gamma = \frac{\alpha'\beta' - \delta^2}{\alpha + \beta' - 2\delta}$$

et cette valeur γ est ainsi une valeur plus rapprochée de la racine que ne le sont α', β' ou δ.

Dans quel sens cette valeur γ est-elle approchée? — Elle est approchée dans le même sens que α' et β', si l'hyperbole est extérieure à la courbe $y = f(x)$; elle est approchée en sens contraire si l'hyperbole est intérieure à cette même courbe. Or, puisqu'il n'y a pas de points d'inflexion entre A et B, l'hyperbole est extérieure ou intérieure à la courbe suivant que le rayon de courbure ρ_2 de l'hyperbole en A (ou en B) est plus grand ou plus petit que le rayon de courbure ρ_1 de la courbe au même point; mais

$$\rho_1 = \frac{\{1 + f'^2(\alpha)\}^{\frac{3}{2}}}{f''(\alpha)}, \quad \rho_2 = \frac{\{1 + f'^2(\alpha)\}^{\frac{3}{2}}}{y''_\alpha},$$

y'' étant la dérivée de y empruntée à l'équation de l'hyperbole.

Donc, γ est approchée dans le même sens que α' et β' ou en sens contraire, suivant que l'on a

$$y''_\alpha < f''(\alpha) \text{ ou } y''_\alpha > f''(\alpha)$$

c'est-à-dire, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte en calculant y''_α,

$$\frac{2\{(\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha) - f(\beta)\}^2 f'(\alpha)f'(\beta)}{\{(\beta - \alpha)f'(\beta) + f(\alpha) - f(\beta)\}\{f(\beta) - f(\alpha)\}^2} - f''(\alpha) < 0 \text{ ou } > 0.$$

Cette expression semble, à première vue, bien compliquée; mais il faut remarquer que les valeurs numériques de tous ses éléments sont déjà connues.

Observation. — Il n'y a peut-être guère lieu d'employer cette nouvelle approximation, que nous proposons, pour les équations trinômes ou quadrinômes; mais elle devient réel-

lement avantageuse pour les équations qui contiennent cinq ou un plus grand nombre de termes.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Henry Bouget.**

LIEU GÉOMÉTRIQUE DU SOMMET DE L'ANGLE DE GRANDEUR CONSTANTE CIRCONSCRIT A UNE COURBE DE LA CLASSE n.

1. — *Historique.* — Ce fut Steiner qui, le premier, énonça cette question d'une façon générale et en donna une solution, sans démonstration, dans le *Bulletin mensuel de l'Académie de Berlin* (1858). Peu. après, dans les *N. Annales de Mathématiques* (1859, p. 179), M. Devulf publia une démonstration analytique de la solution de Steiner.

Dans le même recueil (1859 ; p. 314), M. G. Salmon fit paraître une note ayant pour but de rectifier les assertions de M. Steiner et Devulf.

Enfin en 1861 *(N. Ann.* p. 206), M. E. de Jonquières généralisa cette question, et en donnant une solution entièrement géométrique, il montra que les dissidences de ses prédécesseurs n'étaient qu'apparentes.

Des cas particuliers de ce problème se présentant assez souvent, nous avons cru utile de faire connaître aux lecteurs de ce journal l'article remarquable de M. de Jonquières. C'est le but de cette note, dans laquelle nous trouvons un peu plus simplement que dans l'article précité, tous les résultats obtenus par l'éminent géomètre.

2. — Nous savons, et il est facile de le démontrer, que lorsque les côtés d'un angle de grandeur constante enveloppent une courbe, ils tracent sur la droite de l'infini du plan de la courbe deux divisions homographiques à points doubles imaginaires. D'après cette remarque, il est aisé de voir que le lieu géométrique peut être ramené à celui-ci :

Étant données sur la droite de l'infini d'un plan deux divisions

homographiques à points doubles imaginaires, trouver le lieu des points de rencontre des tangentes menées à une courbe fixe du plan, par les points homologues des deux divisions.

C'est ce problème que nous allons résoudre. Sa solution est évidemment la même que celle du problème qui fait l'objet de cet article.

3. — Soit une courbe C_n de la classe n et appelons *tangentes correspondantes* des tangentes menées des points homologues des divisions homographiques données.

Pour trouver le degré du lieu des points de rencontre des tangentes correspondantes, il nous suffit de chercher le nombre des points de ce lieu qui se trouvent sur la droite de l'infini.

Or, des tangentes correspondantes ne peuvent se couper sur la droite de l'infini qu'en deux points distincts imaginaires, qui sont les points e et f des deux divisions homographiques tracées sur cette droite. Le degré du lieu cherché sera donc la somme des degrés de multiplicité de ces points.

Au point e se trouvent deux faisceaux de n tangentes à la courbe Cn; ces droites se coupent en n^2 points. De même au point f se trouvent deux faisceaux qui se coupent en n^2 autres points. Ces deux groupes de points sont respectivement en e et en f, par suite ces points sont chacun de multiplicité n^2.

Le degré du lieu cherché est donc généralement $2n^2$.

4. — Mais remarquons que, parmi les diverses branches de la courbe, il y a $2n$ droites dont il faut faire abstraction ; le degré du lieu est alors

$$2n^2 - 2n = 2n\,(n - 1).$$

En effet, puisque le point e est double, il y a en ce point n tangentes à la courbe C_n qui coïncident et qui par suite font partie du lieu. Il en est de même au point f. Il y a donc bien en tout $2n$ droites imaginaires qui font partie du lieu.

On peut donc finalement énoncer le théorème suivant, qui est la solution générale du problème cherché :

Le lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de classe n, *est généralement une courbe fermée de degré* 2n (n — 1).

5. — Dans le cas particulier où la courbe C_n est du genre *parabolique*, c'est-à-dire a pour tangente la droite de l'infini de son plan, cette droite fait $2(n - 1)$ fois partie du lieu, et par suite le degré du lieu est seulement

$$2(n^2 - 2n + 1) = 2(n - 1)^2.$$

En effet, il suffit de montrer que chaque point de la droite de l'infini est de multiplicité $2(n - 1)$.

Or, prenons deux points homologues a et a' des divisions homographiques tracées sur cette droite. Par chacun des deux points a et a' passent un faisceau de $(n - 1)$ tangentes à la courbe C_n, plus la droite de l'infini qui fait la n^{me} tangente. La droite de l'infini du faisceau de centre a' coupe le faisceau de centre a en un point a de multiplicité $(n - 1)$: ces $(n - 1)$ points font partie du lieu.

La droite de l'infini ayant une direction indéterminée, celle du faisceau du centre a pourra être considérée comme faisant avec chacune des $(n - 1)$ droites de ce même faisceau un angle égal à l'angle donné : il s'ensuit que chacun des points d'intersection des $(n - 1)$ droites du faisceau de centre a avec la droite de l'infini de ce faisceau donnera un point du lieu, ce qui fait $(n - 1)$ points du lieu confondus au point a.

Le point a est donc un point de multiplicité $2(n - 1)$, et comme il en est de même pour tout autre point de la droite de l'infini, cette droite fait $2(n - 1)$ fois partie du lieu ; donc finalement, dans le cas particulier dont il s'agit, le degré du lieu est seulement $2n(n - 1) - 2(n - 1) = 2(n - 1)^2$.

6. — Dans le cas du numéro (4) la courbe fermée est composée de deux branches, chacune de degré $n(n - 1)$:

L'une engendrée par le sommet d'un angle égal à l'angle donné ;

L'autre, engendrée par le sommet d'un angle égal au supplément de l'angle donné.

A mesure que l'angle donné se rapproche d'un angle droit,

les points de ces courbes se rapprochent deux à deux, et lorsque l'angle donné est égal à un angle droit, le lieu se compose de deux courbes de degré $n(n-1)$ superposées.

On peut aisément vérifier ces résultats pour les coniques.

QUESTION 1

Solution par M. Griffon, commis d'intendance à Montpellier.

On considère un cercle M, *un diamètre fixe* AB, *et la tangente* CC' *à l'extrémité* B *de ce diamètre; par le point* A *on mène une transversale qui rencontre le cercle en* D, *et la bissectrice de l'angle* DAB *qui rencontre en* H *la tangente* CC'*: soit* O *le centre du cercle inscrit au triangle* ADB, *et* Δ *une droite perpendiculaire à* AO *par ce point* O. *Cette droite* Δ *rencontre le cercle décrit de* B *comme centre et avec* BH *comme rayon en deux points. Démontrer que le lieu géométrique décrit par l'un de ces points est une droite, le diamètre* AB; *l'autre point décrit une strophoïde. On démontrera cette double propriété par le calcul et la géométrie.*

SOLUTION ANALYTIQUE

Prenons l'origine au point B, AB pour axe des x, la tangente BH pour axe des y. Soit R le rayon du cercle donné, φ l'angle variable $\mathrm{BAH} = \dfrac{\mathrm{BAD}}{2}$.

L'équation de AH est $y = m(x + 2\mathrm{R})$, en posant
$$m = \operatorname{tg} \varphi.$$

On peut remarquer que $\mathrm{DBA} = 90 - 2\varphi$. Si on considère la bissectrice de l'angle DBA, qui donnera par son intersection avec AH le centre ω du cercle inscrit au triangle ADB, on a $\omega\mathrm{BA} = 45 - \varphi$, et $\omega\mathrm{B}x = \dfrac{3\pi}{4} + \varphi$.

L'équation de Bω est donc
$$y = x \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = x\,\frac{-1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi} = x\,\frac{m - 1}{m + 1}.$$

Les coordonnées de ω sont donc données par

$$\left\{\begin{array}{l} y = m(x + 2R) \\ y = \dfrac{m-1}{m+1}x \end{array}\right., \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{2Rm(m+1)}{m^2+1} \\ y' = -\dfrac{2Rm(m-1)}{m^2+1} \end{array}\right.$$

Par suite, l'équation de la droite Δ est

$$y + \frac{2Rm(m-1)}{m^2+1} = -\frac{1}{m}\left(x + \frac{2Rm(m+1)}{m^2+1}\right)$$

$$y + \frac{x}{m} = -\frac{2R(m+1)}{m^2+1} - \frac{2Rm(m-1)}{m^2+1}$$

$$= -\frac{2R}{m^2+1}(m + 1 + m^2 - m) = -2R$$

$$my + x + 2Rm = 0. \qquad (1)$$

On a $BH = 2Rm$. L'équation du cercle décrit de B comme centre avec BH pour rayon est donc

$$x^2 + y^2 = 4R^2m^2. \qquad (2)$$

En éliminant m entre (1) et (2), on a

$$x^2 + y^2 = \frac{4R^2x^2}{(y+2R)^2},$$

ou

$$(x^2 + y^2)(y + 2R)^2 - 4R^2x^2 = 0.$$

C'est le lieu des points d'intersection de la droite Δ avec le cercle B.

En simplifiant, l'équation précédente devient

$$y^2(y + 2x)^2 + x^2y^2 + 4Rx^2y = 0;$$

d'où

$$y = 0,$$

c'est la droite AB, et

$$x^2 = -\frac{y(y+2R)^2}{y+4R},$$

c'est l'équation d'une strophoïde droite ayant pour sommet le point B, origine des coordonnées, pour point double le point $x = 0$, $y = -2R$ (c'est le point E de la figure), et pour asymptote la droite $y = -4R$.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit M le point où la droite Δ rencontre le diamètre AB.

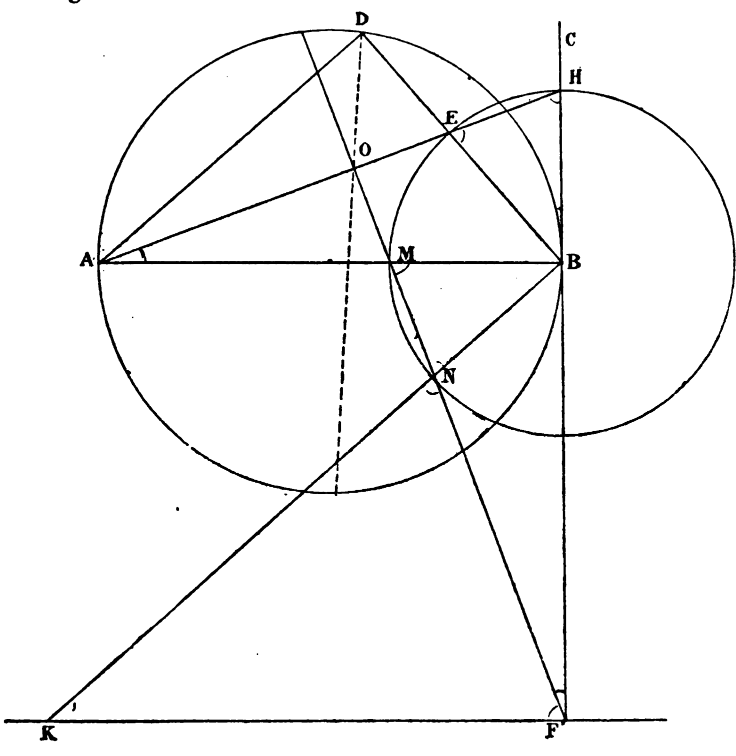
1° *Le lieu de* P *est la droite* AB. — Soit φ l'angle $\widehat{BAH}$; on

a déjà vu que OBA $= \frac{1}{2}(90 - 2\varphi) = 45 - \varphi$. Dans le triangle OMA, l'angle extérieur OMB est égal à $90 + \varphi$.

Il en résulte que dans le triangle OMB

$$\text{OMB} = 180 - (90 + \varphi) - (45 - \varphi) = 45^\circ.$$

Comme HOM est rectangle, OB est la bissectrice de l'angle MOH.



Si alors on considère le cercle circonscrit au quadrilatère MOHB (qui est évidemment inscriptible, puisque deux angles opposés sont droits), OB passe par le milieu du demi-cercle décrit sur MH comme diamètre, et BH = MB.

Donc M est sur le cercle B; c'est bien le point d'intersection de Δ avec ce cercle; comme c'est aussi le point d'intersection de Δ avec AB, le lieu de ce point est le diamètre AB.

2° *Le lieu de* N *est une strophoïde.* — Soit N le deuxième point de rencontre de Δ avec le cercle B. — Δ passe par un point fixe situé sur la tangente CC'. — Soit, en effet, F le point d'intersection de Δ et de CC'. Abaissons OI perpendiculaire sur AB; les triangles OPI, BPF sont semblables et donnent

$$\frac{BF}{OI} = \frac{BM}{IM} = \frac{BH}{FP},$$

puisque BM = BH.

Mais, dans le triangle BHA, on a BH = 2R tg φ, et dans le triangle MOI, MI = OI tg φ. Donc $\frac{BF}{OI} = \frac{2R \operatorname{tg} \varphi}{OI \operatorname{tg} \varphi}$, d'où BE = 2R, le point F est donc fixe sur CC'.

Cela posé, menons par F une parallèle à AB, et menons BN jusqu'à sa rencontre en K avec cette parallèle.

Il est évident que OFH = φ; donc KFN = 90 — φ.

Le triangle MBN est isoscèle et les angles à la base sont égaux à 90 — φ; l'angle KNF opposé par le sommet à l'angle à la base MBN du triangle MNB, est lui aussi égal à 90 — φ. Donc le triangle QKF est isoscèle, et KQ = KF.

Le lieu du point Q est donc, d'après une génération connue de la strophoïde, une strophoïde droite ayant le point B pour sommet et le point E pour point double.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Oger, à Saint-Servan; Mayon, lycée Henri IV, à Paris; Vazou, collège Rollin; Robillard, lycée Saint-Louis.

QUESTION 10

Solution par M. E Gaullaider, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis

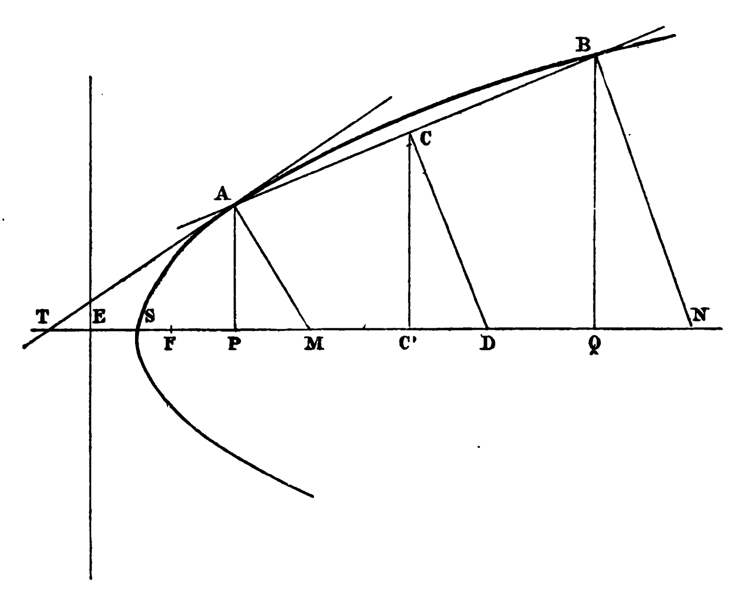
---

Soit AB *une corde dans une parabole* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *en* C' *sur l'axe et on mène par ce point* C *une perpendiculaire à* AB, *perpendiculaire qui rencontre l'axe en* D.

Démontrer que quel que soit AB, C'D *est constamment égal à* p. *Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole, connaissant deux points et l'axe de la courbe.*

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu que les normales A *et* B *coupent l'axe en des points équidistants du point* D.

L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet est $y^2 = 2px$.



Les coordonnées de A et de B étant respectivement (x_1, y_1), (x_2, y_2), on a

$$y_1^2 = 2px_1$$
$$y_2^2 = 2px_2.$$

L'équation de la droite CD perpendiculaire à AB est

$$\frac{y - \frac{y_1 + y_2}{2}}{x - \frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2};$$

en y faisant $y = 0$, on a

$$\frac{y_1 + y_2}{2x - x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2};$$

d'où $x = \dfrac{2px_1 - 2px_2 + x_1^2 - x_2^2}{2(x_1 - x_2)} = p + \dfrac{x_1 + x_2}{2}.$

C'est l'abscisse du point D. Alors

$$CD' = p + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} = p.$$

C. Q. F. D.

Connaissant deux points A et B de la parabole on peut trouver le sommet. Pour cela soit CD perpendiculaire au milieu de AB et d'après ce qui précède C'D $= p$. On abaisse AP perpendiculaire sur l'axe et on prend PM $=$ C'D $= p$. La droite AM est normale en A, la droite AT perpendiculaire à AM est la tangente en A qui rencontre l'axe en T, on prend le milieu S de la longueur TP, le point S est le sommet.

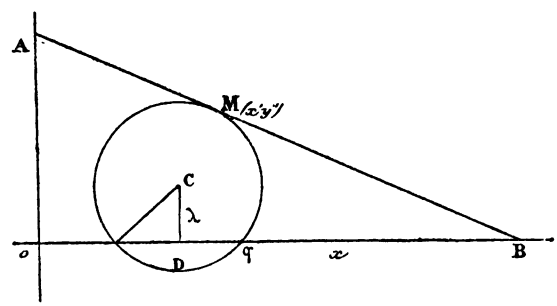
Puisque PC' $=$ C'Q et puisque PM $=$ C'D $=$ QN $= p$, on en déduit MD $=$ DN.

Nota. — La même question a été résolue par M. Th. Alexandre, élève de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

QUESTION 31

Solution par M. Griffon, commis d'intendance militaire à Montpellier.

On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy ; *sur* Ox *deux points fixes* P *et* Q; *par ces points* P *et* Q *on fait passer une infinité de cercles* C *et on imagine les hyperboles* H, *qui ont pour asymptotes* Ox, Oy *et sont tangentes à* C. *Trouver le lieu des points de contact des courbes* H *et* C.



Soient p et q les abscisses des points P et Q. Posons

$$\frac{p + q}{2} = d = \text{OD}.$$

L'équation d'un cercle passant par P et Q est

$$(x - d)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + (d - p)^2$$

ou $$x^2 + y^2 - 2dx - 2\lambda y + 2pd - p^2 = 0. \qquad (1)$$

Soit M un point du lieu. La tangente commune en M à l'hyperbole H et au cercle C est partagée en deux parties égales par les asymptotes Ox, Oy et le point de contact. Si x', y' sont les coordonnées de M, on a

$$x' = \frac{OB}{2}, \quad y' = \frac{OA}{2}.$$

La tangente en x', y' au cercle (1) a pour équation

$$x(x' - d) + y(y' - \lambda) - dx' - \lambda y' + 2pd - p^2 = 0.$$

Pour $y = 0$ on a

$$OB = \frac{dx' + \lambda y' + p^2 - 2pd}{x' - d} = 2x';$$

pour $x = 0$ on a

$$OA = \frac{dx' + \lambda y' + p^2 - 2pd}{y' - \lambda} = 2y'.$$

Ces deux équations donnent en rendant x', y' coordonnées courantes

$$2x^2 - 3dx - p^2 + 2pd = \lambda y$$
$$2y^2 - dx - p^2 + 2pd = 3\lambda y$$

et en éliminant λ on a pour l'équation du lieu

$$y^2 - 3x^2 + 4dx + p^2 - 2pd = 0. \qquad (2)$$

C'est une hyperbole ayant ses axes parallèles aux axes de coordonnées.

L'équation (2) peut s'écrire

$$y^2 - 3\left(x - \frac{2d}{3}\right)^2 + p^2 - 2pd + \frac{4d^2}{3} = 0.$$

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point $y = 0$, $x = \frac{2d}{3}$ par les formules

$$y = Y; \quad x - \frac{2d}{3} = X.$$

L'équation (3) devient

$$3X^2 - Y^2 = (d - p)^2 + \frac{d^2}{3} = K^2$$

et l'équation réduite est

$$\frac{X^2}{\left(\frac{K^2}{3}\right)} - \frac{Y^2}{K^2} = 1.$$

L'hyperbole, lieu du point M est facile à construire. Elle a son centre sur Ox, en un point E, tel que $OE = \frac{2}{3} OD$. On a aisément la longueur K, hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont $PD = d - p$ et $\frac{OD\sqrt{3}}{3} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Les demi-axes de la conique ont alors pour longueur l'un l'axe transverse, dirigé suivant Ox, $\frac{K\sqrt{3}}{3}$, et l'autre, l'axe imaginaire, K. Le demi-angle des asymptotes a pour tangente

$$\text{tg}\,\varphi = \sqrt{3}$$
$$\varphi = 60^\circ.$$

On voit facilement que la branche de droite de l'hyperbole est la seule qui satisfasse réellement à la question.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Alexandre, d'Angers; Hellot, Lelieuvre, à Rouen.

QUESTION 32

Solution par M. JAGGI, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Besançon.

On considère des cercles C *passant par le sommet d'une parabole* P *et tangents à cette courbe en un point différent du sommet.*

1° *Trouver l'équation générale des cercles* C;

2° *Trouver le lieu* U *des centres.*

Ce lieu est une parabole cubique ayant un point de rebroussement dont les coordonnées sont (p, o); *on demande de déterminer l'intersection de* U *et de* P. (G. L.)

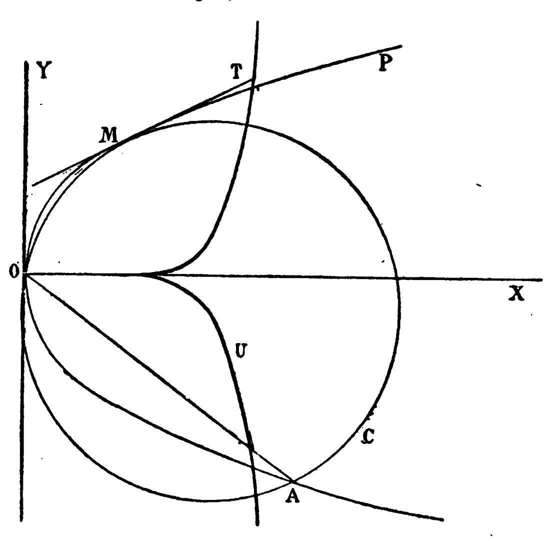
Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Soit C un cercle passant par O et tangent à la parabole en M. Menons la tangente MT et joignons OA.

Les deux droites MT et OA, sécantes communes à un cercle et à une conique sont également inclinées sur les axes.

Soit $y - mx - \frac{p}{2m} = 0$ l'équation de la tangente MT; l'équation de OA sera

$$y + mx = 0.$$



L'équation du cercle cherché sera alors de la forme

$$y^2 - 2px + \lambda \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y + mx) = 0.$$

Exprimons que cette équation représente un cercle, on a

$$1 + \gamma = -\lambda m^2$$

$$\lambda = -\frac{1}{1 + m^2}.$$

L'équation cherchée est donc

$$(1 + m^2)(y^2 - 2px) - \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y + mx) = 0.$$

2° Le centre est donné par les équations

$$f'_x = 0$$

$$f'_y = 0$$

$f = 0$ représentant l'équation précédente. Ces équations se réduisent à

$$4m^3y + p = 0$$

$$4m^2(x - p) - 3p = 0.$$

Pour avoir le lieu du centre, éliminons m entre ces deux équations, on a

$$(4p - x)^3 + 27py^2 = 0.$$

Cette courbe est une parabole cubique dont le point de rebroussement est $x = p,\ y = 0.$

3° Intersection de U et de P.

Il s'agit de résoudre le système

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$4\,(p - x)^3 + 27py^2 = 0.$$

Remplaçons y^2 par $2px$ dans la seconde, on a

$$2x^3 - 6px^2 = 21p^2x - 2p^3 = 0,$$

équation qui n'a qu'une racine positive.

La courbe ne rencontre donc la parabole qu'en deux points réels, symétriques par rapport à Ox.

Pour trouver cette racine écrivons l'équation précédente sous la forme

$$2\,\frac{x^3}{p^3} - 6\,\frac{x^2}{p^2} - 21\,\frac{x}{p} - 2 = 0$$

et posons $\dfrac{x}{p} = x';$

il vient $2x'^3 - 6x'^2 - 21x' - 2 = 0.$

La racine positive est 5,0985, racine approchée à 1/2 unité près du quatrième ordre décimal.

Donc $x = px' = 5{,}0985.p.$

Par suite les coordonnées des deux points d'intersection cherchés sont

$$x = 5{,}0985\ p \text{ et} \pm p\,\sqrt{5{,}0985 \times 2} = \pm\, 3{,}19\ p.$$

Note de la rédaction. — L'intersection de la parabole P et du lieu U n'est pas déterminée avec précision dans cette solution, et dans celles que nous avons reçues et que nous signalons plus loin.

L'équation qu'il faut résoudre est

$$27p^2x = 2\,(x - p)^3$$

ou

$$54p^2.2x = 8\,(x - p)^3.$$

Il est naturel de poser $\dfrac{2\,(x - p)}{p} = X$ pour ramener cette équation à la forme normale. On obtient ainsi l'équation

$$X^3 - 54X - 108 = 0.$$

Cette équation admet la racine $X' = -6$, et l'on a

$$X^3 - 54X - 108 = (X + 6)(X^2 - 6X - 18).$$

La racine demandée est la racine positive de l'équation

$$X^2 - 6X - 18 = 0,$$

c'est-à-dire $X'' = 3 + \sqrt{27}$.

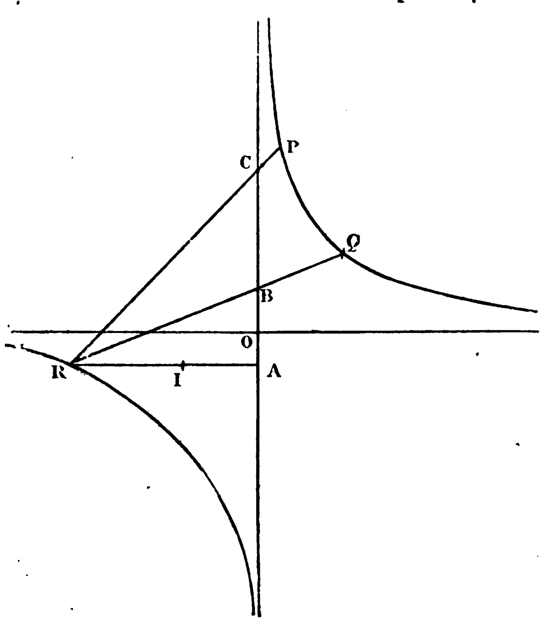
On a finalement $x = p\dfrac{5 + \sqrt{27}}{2}$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Percerau, à Besançon Alexandre, à Angers.

QUESTION 41

Solution par M. KAUFFMANN, élève au Lycée de Bordeaux.

On considère une hyperbole équilatère et une des asymptotes D *de cette courbe. Soient* P *et* Q *deux points fixes de l'hyperbole,* R *un point mobile sur cette hyperbole.* 1° *On demande le lieu des centres des cercles* C *circonscrits au triangle formé par les droites* RP, RQ *et* D; 2° *ayant mené par* R *une perpendiculaire à* D, *cette droite rencontre* C *en un point* I, *autre que* R. *Trouver le lieu du point* I.



(G. L.)

Soit $xy = k^2$ l'équation de l'hyperbole équilatère. Je vais

d'abord chercher le lieu du point I. Soit A le point où la droite RI coupe l'asymptote D. Je désigne par α l'y du point P et par β l'y du point Q. En vertu d'une propriété de l'hyperbole

$$AB = \beta, \quad AC = \alpha.$$

Si donc je désigne par x et y les coordonnées du point I, $AI = x$, $AR = \dfrac{k^2}{y}$ et puisque $AI \,.\, AR = AB \,.\, AC$:

$$\alpha\beta = x \,. \frac{k^2}{y}$$

Équation d'une droite.

Je vais chercher maintenant le lieu des centres.

Soit y_1, l'y du point I. J'aurai

$$AI = \frac{\alpha\beta y_1}{k^2}, \quad AR = \frac{k^2}{y_1}.$$

Le centre se trouve sur une perpendiculaire élevée au milieu de RI. Je désigne par x, y les coordonnées de ce point.

J'aurai $$2x = \frac{\alpha\beta y_1}{k^2} + \frac{k^2}{y_1}.$$

De même $OB = \beta + y_1$ puisque y_1 est négatif.

$OA = \alpha + y_1$

J'aurai alors $2y = \alpha + \beta + 2y_1$.

L'équation du lieu sera alors

$$2k^2x\left(y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = k^4 + \alpha\beta\left(y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2.$$

En transportant les axes au point $x = 0, y = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, l'équation devient $2k^2\,xy = k^4 + \alpha\beta y^2$.

Équation d'une hyperbole rapportée à son centre et ayant pour asymptotes les droites $y = 0$, $\alpha\beta y - 2\,k^2\,x = 0$.

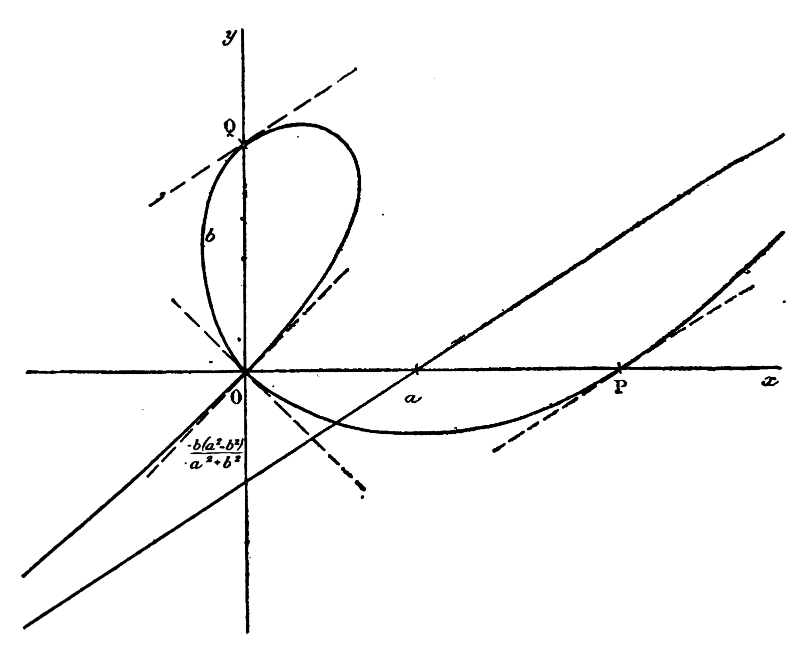
QUESTION 42

Solution par M. PORNAY, élève au Lycée de Toulouse.

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy; *sur* Ox *un point fixe* P; *sur* Oy *un autre point fixe* Q. *Du point* O *comme*

centre avec un rayon supposé variable, on décrit un cercle C, ***et*** *des points* P *et* Q *on mène des tangentes au cercle* C; *ces tangentes se coupent en des points dont on demande le lieu géométrique.*

Prenons pour axes les deux droites données; soit a l'abscisse du point P, b l'ordonnée du point Q, r le rayon d'un cercle quelconque décrit du point O comme centre.



L'ensemble des tangentes menées du point P à ce cercle a pour équation $a^2y^2 = r^2[(x - a)^2 + y^2]$;
celui du point Q,

$$b^2x^2 = r^2[x^2 + (y - b)^2].$$

Éliminons r^2 entre ces deux équations; l'équation du lieu se présente sous la forme

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} = \frac{(x - a)^2 + y^2}{x^2 + (y - b)^2}$$

qui devient après simplifications

$$b^2x^4 - a^2y^4 - (a^2 - b^2)x^2y^2 - 2ab^2x^3 + 2a^2by^3 + a^2b^2x^2 - a^2b^2y^2 = 0. \qquad (1)$$

Si nous considérons en particulier le cercle décrit du point O comme centre et tangent à la droite PQ, nous voyons que deux des tangentes menées des points P et Q se confondent suivant la droite PQ; cette droite fait donc partie du lieu et nous pouvons mettre le premier membre de son équation en facteur dans (1) qui devient alors

$$(bx + ay - ab)[(bx - ay)(x^2 + y^2) - ab(x^2 - y^2)] = 0. \quad (2)$$

Le lieu se compose donc de la droite PQ et de la cubique

$$(bx - ay)(x^2 + y^2) - ab(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette cubique présente un point double à l'origine et les tangentes en ce point sont les bissectrices des angles des axes.

Elle passe par les points P et Q.

Au point Q la tangente a pour coefficient angulaire $\frac{b}{a}$.

Elle est parallèle à la diagonale du rectangle construit sur OP, OM qui aboutit en O.

Au point P la tangente est parallèle à la même droite.

Enfin la seule direction asymptotique réelle est

$$bx - ay = 0.$$

A cette direction asymptotique correspond une asymptote dont l'ordonnée à l'origine est

$$-\frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2};$$

et cette ordonnée sera négative si nous supposons $a > b$.

Ces différentes remarques permettent de construire la courbe représentée par la figure.

Le cas où $a = b$ est remarquable. La cubique devient alors

$$(x - y)[x^2 + y^2 - a(x + y)] = 0$$

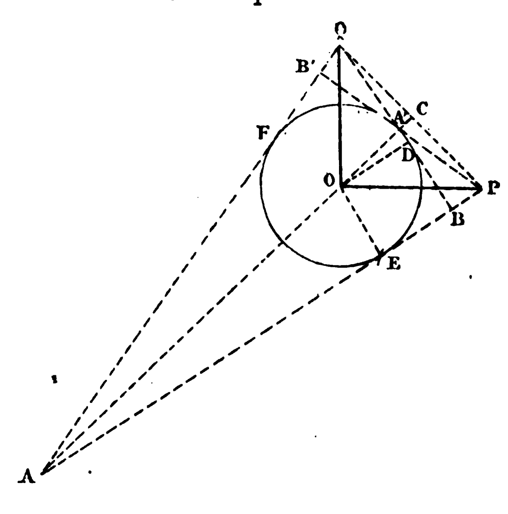
et se compose de la droite $x = y$ et du cercle qui a pour centre le centre du carré que l'on peut construire sur OP, OQ et passe par les sommets de ce carré.

Ce résultat pouvait se prévoir géométriquement.

1° Considérons le point A intersection des deux tangentes QF et PE ; joignons AO. La droite AO est bissectrice de l'angle QAP du triangle QAP. Or il est facile de voir que ce triangle est isoscèle ; donc cette droite est perpendiculaire à QP et par conséquent c'est la bissectrice de l'angle QOP.

Donc le lieu des points tels que A est la bissectrice de l'angle droit QOP. De même pour A'.

2° Considérons le point B intersection des deux tangentes PE et QB. Le quadrilatère ODBE est inscriptible, car les angles D et E sont droits. D'autre part, les deux angles DOQ et POE sont égaux dans les deux triangles égaux ODQ et POE. Donc POE est complémentaire de l'angle DOP. Donc l'angle DOE est droit et par conséquent l'angle DBE. Le lieu du point B est donc la circonférence décrite sur PQ comme diamètre. De même pour B'.



ERRATUM

La question 53, proposée dans le numéro de février doit être rétablie comme il suit :

Soient *a*, *b*, *c*, *d*, quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle ; si l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, la question proposée a au moins deux racines imaginaires.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

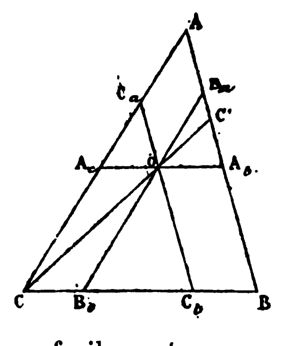
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 5254-3.

QUELQUES THÉORÈMES

SUR LES DROITES MENÉES PAR UN POINT DU PLAN D'UN TRIANGLE PARALLÈLEMENT A SES COTÉS

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

Étant donné un triangle ABC, *trouver un point* O *tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux trois côtés, limitées à ces côtés, savoir* $A_c A_b$ *parallèle à* CB, *etc, les parallélogrammes formés par deux de ces droites et par les deux côtés qui leur sont parallèles soient proportionnels aux* m^mes^ *puissances du troisième côté.*



Équation du lieu de O *si* m *varie d'une façon continue.*

En prenant CB pour axe des x, CA pour axe des y, appelant x et y les coordonnées du point O et exprimant les conditions de l'énoncé, on a facilement

$$bc^m x + a(c^m + a^m)y = abc^m \qquad (1)$$
$$b(b^m + c^m)x + ac^m y = abc^m \qquad (2)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{a^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = a\,\frac{\dfrac{1}{b^m}}{\dfrac{1}{a^m} + \dfrac{1}{b^m} + \dfrac{1}{c^m}} \\ y &= b\,\frac{b^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = b\,\frac{\dfrac{1}{a^m}}{\dfrac{1}{a^m} + \dfrac{1}{b^m} + \dfrac{1}{c^m}} \end{aligned}\right\} (3)$$

La remarque que l'on a $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}$ permet de trouver facilement l'équation du lieu; quand m varie elle est

$$\frac{[ay]^{\log\frac{b}{c}}}{[bx]^{\log\frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log\frac{b}{a}} \tag{4}$$

Cette remarque montre aussi que les distances du point O aux trois côtés sont proportionnelles aux $m + 1^{\text{mes}}$ puissances de ces côtés

Si donc on cherchait *le lieu du point dont les distances aux trois côtés soient proportionnelles aux* m^mes *puissances de ces côtés, on trouverait l'équation* (4).

Si l'on appelle C′ le point où CO coupe AB, on trouve

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{b^m}{a^m}.$$

(Voir Comptes rendus du Congrès d'Alger de l'Association française, Brocard, p. 150.)

D'où, si l'on cherchait

Le lieu du point O *tel que si l'on joint ce point aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments inversement proportionnels aux puissances* m^mes *des côtés adjacents, on trouverait aussi l'équation* (4).

Pour $m = -2$ les formules (3) donnent pour O le centre des médianes antiparallèles.

Pour $m = -1$ les formules (3) donnent pour O le centre du cercle inscrit.

Pour $m = 0$ les formules (3) donnent pour O le centre de gravité.

Pour $m = 1$ on voit facilement que l'on a

$$B_cC_b = B_aA_b = A_cC_a = \frac{abc}{ab + ac + cb},$$

c'est-à-dire *que* O *est le point tel que les différences entre un côté et la partie de la parallèle à ce côté comprise entre les deux autres menées par ce point soit la même pour les trois côtés.*

Ce point est celui que l'on obtient par le concours des droites qui joignent à un sommet le point symétrique par rapport au milieu du côté du pied de la bissectrice qui tombe sur ce côté.

Pour $m = 2$ on trouve que l'on a

$$\frac{B_cC_b}{b \times c} = \frac{C_aA_c}{c \times a} = \frac{A_bB_a}{a \times b} = \frac{abc}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

C'est-à-dire que les parties des côtés comprises entre deux parallèles sont proportionnelles aux produits des deux autres côtés, etc.

En général, si l'on appelle avec M. de Longchamps *points réciproques* deux points tels, que si on les joint aux sommets d'un triangle ils coupent les côtés opposés en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté, on peut dire: *A tout point* O *du lieu défini par une valeur de* m *dans les équations* (1) *et* (2) *correspond pour la valeur de* m *égale et de signe contraire un point* O' *défini par les équations*

$$x = a.\frac{b^m}{a^m + b^m + c^m}$$

$$y = b.\frac{a^m}{a^m + b^m + c^m}$$

et tel que O *et* O' *sont réciproques. Le lieu de* O *et le lieu de* O' *se confondent. Donc le lieu de* O *défini par* (4) *est aussi le lieu du point tel que si on le joint aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments proportionnels aux puissances des côtés adjacents.*

On trouve facilement

$$\overline{CC'}^2 = \frac{a^{2m+2} + b^{2m+2} + a^m b^m (a^2 + b^2 - c^2)}{(a^m + b^m)^2}$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{a^{2m}\,[b^{2m+2} + c^{2m+2} + c^m b^m (c^2 + b^2 - a^2)]}{[b^m c^m + a^m c^m + a^m b_m]^2}.$$

Remarquons que l'on a

$$B_c\,C_b \times a^{m-1} = C_a\,A_c \times b^{m-1} = A_b\,B_a \times c^{m-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}}.$$

Le lieu du point O est donc encore *le lieu du point tel que si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, les portions des côtés comprises entre ces parallèles sont proportionnelles aux inverses de puissances de ces côtés.*

On trouverait le même lieu si avec l'énoncé précédent l'on disait: *sont proportionnelles aux puissances de ces côtés*, au

lieu de : *aux inverses des puissances.* Nous avons établi cette dualité dans les énoncés en considérant les points réciproques O et O'; mais il était évident que, algébriquement, le lieu de O correspondant aux puissances m serait le même lieu que celui qui correspondait aussi aux inverses de ces puissances, puisque nous faisons varier m de $-\infty$ à $+\infty$ et que m passe toujours par deux valeurs égales de signe contraire, ce qui correspond à une puissance et à l'inverse de cette puissance.

On ferait des remarques analogues sur *le lieu des points tels que si l'on mène par ces points des parallèles aux trois côtés d'un triangle, les parties de ces parallèles comprises entre deux des côtés soient proportionnelles aux puissances ou aux inverses des puissances du troisième.*

Voici encore deux théorèmes simples sur les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les trois parallèles aux trois côtés menés par un point O du plan; *ils sont presque évidents;* mais je ne crois point qu'ils aient été énoncés, et comme leurs réciproques peuvent servir dans certains cas à prouver que trois droites concourent ou ne concourent pas en un même point, il me semble utile de les signaler.

Considérons les neuf segments suivants :

Deux segments interceptés sur les deux côtés entre le troisième côté et sa parallèle menée par O, en tout six; un segment intercepté sur chaque côté entre les parallèles aux deux autres, en tout trois.

Théorème I. — *Si l'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, en tournant dans le sens* CBA *les six segments de la première espèce, le produit des trois segments de rang pair égale le produit des trois segments de rang impair et égale aussi le produit des trois segments de la seconde espèce.*

Avec les notations déjà adoptées, ce théorème s'écrit ainsi :

$$AC_a \times BA_b \times CB_c = AB_a \times BC_b \times CA_c$$
$$= B_cC_b \times A_cC_a \times B_aA_b.$$

Théorème II. — *Sur chaque côté il y a trois de ces neuf segments; on peut les ranger, quel que soit O, de façon que les longueurs des trois segments soient — mais les segments n'étant*

pas pris dans le même ordre sur chaque côté — proportionnelles aux longueurs des trois segments d'un quelconque des deux autres côtés.

Avec les notations adoptées, CB_c, B_cC_b, C_bB, sont proportionnels à C_aA_c, A_cC, AC_a et à B_aA, BA_b, A_bB_a.

Ces deux théorèmes sont presque évidents en observant que les longueurs des segments considérés sont celles des côtés des trois triangles semblables OB_cC_b, OC_aA_c, OA_bB_a.

Le théorème I donne lieu aux remarques suivantes :

1° Les trois segments impairs de première espèce sont égaux entre eux, pour le point

$$S\left\{\begin{aligned} x &= \frac{abc}{bc+ac+ab}, \\ y &= \frac{ab^2}{bc+ac+ab} \end{aligned}\right. \text{ et égaux à } \frac{abc}{bc+ac+ab}.$$

2° Les trois segments pairs de première espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$S'\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a^2b}{bc+ac+ab}, \\ y &= \frac{abc}{bc+ac+ab}. \end{aligned}\right.$$

Si par le pied d'une bissectrice sur un côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, ces parallèles coupent les côtés en deux points, en tout six points sur les trois côtés; si l'on joint ces six points chacun au sommet opposé au côté sur lequel est le point, on a six droites dont trois passent en S *et trois en* S'.

3° Les trois segments de seconde espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a^2c}{bc+ac+ab}, \\ y &= \frac{b^2c}{bc+ac+ab}. \end{aligned}\right.$$

Ce dernier point est le réciproque (voir plus haut) du centre du cercle inscrit.

4° Si le point O est sur une droite passant par C, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la parallèle à AB menée par le centre de gravité.

5° Si le point O est sur une droite parallèle à AB, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la droite joignant C au centre de gravité.

6° Le produit des trois segments sera maximum lorsque O sera au centre de gravité et aura pour valeur $\frac{abc}{27}$.

Pour terminer cette étude, nous énoncerons la propriété suivante :

Dans un triangle, si l'on joint le centre du cercle inscrit aux pieds des trois bissectrices extérieures, on a trois droites telles que si d'un de leurs points on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les longueurs de ces trois perpendiculaires forment une progression arithmétique.

UN LIEU GÉOMÉTRIQUE

Le problème que nous nous proposons n'est pas nouveau ; on en a déjà donné la solution par des considérations de simple géométrie ; nous n'avons d'autre but que de montrer une fois de plus comment l'emploi raisonné des méthodes de la géométrie cartésienne peut conduire à des constructions géométriques assez élégantes, sans aucun tour de force, en ne se servant que des formules les plus connues.

L'équation générale des coniques (axes rectangulaires) qui ont pour directrice une droite donnée oy est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda x^2 = 0 ;$$

si on assujettit ces courbes à toucher les deux droites

$$px + qy - 1 = 0, \text{ et } p'x + q'y - 1 = 0,$$

on trouve sans peine les deux conditions

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda + A)B - C^2 = 0 \\ (\lambda + A')B' - C'^2 = 0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

où l'on a posé $A = p^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2p\alpha + 1$

$$\begin{aligned}
B &= q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1 \\
C &= pq(\alpha^2 + \beta^2) - q\alpha - p\beta \\
A' &= p'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2p'\alpha + 1 \\
B' &= q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1 \\
C' &= p'q'(\alpha^2 + \beta^2) - q'\alpha - p'\beta
\end{aligned}$$

Or on trouve, en effectuant les opérations, que

$$A \,.\, B - C^2 = (p\alpha + q\beta - 1)^2$$
$$A' \,.\, B' - C'^2 = (p'\alpha + q'\beta - 1)^2$$

de sorte que l'élimination de λ entre les équations (1) nous donne, pour le lieu du foyer conjugué à la directrice donnée, l'équation

$$[q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1]\,(p'\alpha + q'\beta - 1)^2 -$$
$$[q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1]\,(p\alpha + q\beta - 1)^2 = 0$$

c'est le lieu que nous nous proposons d'étudier d'après son équation.

Pour donner aux diverses lettres une signification uniforme, je veux dire, pour que toutes les lettres indiquent des longueurs, je pose

$$p = \frac{1}{a},\ q = \frac{1}{b},\ p' = \frac{1}{a'},\ q' = \frac{1}{b'},$$

et l'équation du lieu, en reprenant pour les coordonnées mobiles la notation habituelle, sera

$$(\text{U})\ a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2)\,(b'x + a'y - a'b')^2 -$$
$$a'^2(x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2)\,(bx + ay - ab)^2 = 0$$

que nous écrirons sommairement

$$a^2 . C . T'^2 - a'^2 C' . T^2 = 0;$$

or, soit

$$C = (y - b)^2 + x^2 = (y - b + ix)\,(y - b - ix) = I \,.\, J$$

et

$$C' = (y - b')^2 + x^2 = (y - b' + ix)\,(y - b' - ix) = I' \,.\, J'$$

et l'équation du lieu devient

$$a^2 . I . J . T'^2 - a'^2 . I' . J' . T^2 = 0$$

ce qui nous montre immédiatement que le point de concours S des deux tangentes fixes est un point double du lieu; mais les deux droites I, J se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B avec la tangente T; de même les droites I', J' se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B' avec la tangente T'; d'où l'on con-

clut immédiatement que les points B et B′ sont aussi des points doubles du lieu total.

Mais les directions asymptotiques du lieu total sont fournies par l'équation

$$(x^2 + y^2)\ [a^2 (b'x + a'y)^2 - a'^2 (bx + ay)^2] = 0$$

ou bien $$(x^2 + y^2)\ .\ x \left[\frac{bx + ay}{a} + \frac{b'x + a'y}{a'}\right] = 0$$

ou bien

$$(x^2+y^2)\left[\frac{bx+ay}{a} - \frac{b'x + a'y}{a'}\right]\left[\frac{bx + ay}{a} + \frac{b'x + a'y}{a'}\right] = 0$$

ce sont donc : 1° les deux directions asymptotiques de tous les cercles du plan ; 2° la directrice donnée ; 3° la médiane SG du triangle BSB′ ; nous voyons donc que la directrice donnée a cinq points sur le lieu géométrique ; donc elle en constitue une branche séparée, et, après avoir enlevé cette branche, il restera une courbe du troisième degré qui a pour points simples les points B et B′, qui a encore pour point double le point S ; et ses directions asymptotiques sont la médiane SG et les deux directions asymptotiques de toute circonférence.

Voyons à déterminer une construction continue du lieu ; soit $T = \lambda T'$, il vient

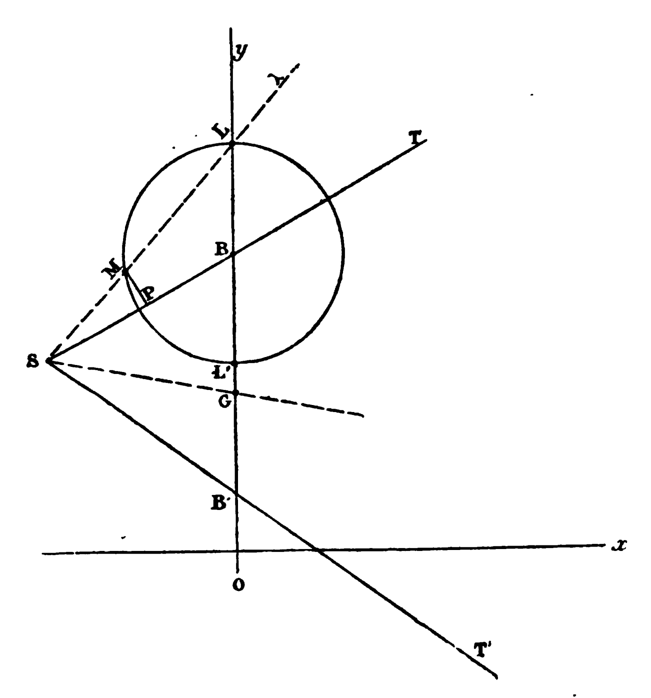
$$a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2) - \lambda^2 a'^2 (x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2) = 0$$

ce qui donne l'intersection d'une droite menée à volonté par le point S avec une circonférence ; or on voit sans peine que cette circonférence passe au point L où la droite mobile coupe oy ; si donc on construit L′ conjugué de L relativement au segment BB′, la circonférence est décrite sur LL′ comme diamètre ; on peut donc formuler comme il suit la construction géométrique du lieu total :

Par le point S, menez une transversale à volonté Sλ qui coupe oy en un point L ; et prenez L′ conjugué de L relativement au segment BB′ ; la circonférence décrite sur LL′ comme diamètre coupera Sλ en deux points L et M ; le lieu de ces deux points est le lieu total du quatrième ordre, qui se compose de la droite oy et d'une cubique que décrira le point M.

Cette construction donne sans peine les tangentes au point

double S; car lorsque la circonférence mobile passera au point S, Sλ devra être également inclinée sur SB et sur SB′; donc les tangentes au point double S sont deux droites



rectangulaires entre elles, et bissectrices des deux droites fixes SB, SB′; ce nouveau fait, joint à ceux qui sont déjà établis, permet d'affirmer que la cubique actuelle est une *focale à nœud* de Quételet.

Remarque. — L'équation du lieu (U) peut s'écrire :

$$a^2 \cdot \overline{MB}^2 \cdot \overline{MP'}^2 \cdot \overline{A'B'}^2 = a'^2 \cdot \overline{MB'}^2 \cdot \overline{MP}^2 \cdot \overline{AB}^2$$

ou

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{MP}{MP'} \cdot \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{a'}{a}.$$

Cette relation conduit, en sens inverse, à la construction du lieu par l'intersection d'une droite et d'un cercle; car se donner arbitrairement $\frac{MP}{MP'}$, c'est se donner une droite

Sλ, d'où résulte le rapport $\frac{MB}{MB'}$ qui détermine la circonférence correspondante.

Autre remarque. — On voit, par l'exemple qui précède, que l'étude d'un lieu géométrique, même décomposable, se peut faire simplement sur le lieu total, plus simplement même que si l'on effectuait d'abord la décomposition; cela tient sans doute à ce que l'équation totale obtenue par des méthodes d'élimination correctes et générales, garde, dans sa forme première, comme l'image algébrique des propriétés et du mode de génération le plus élégant de la courbe.

On rencontre d'ailleurs bien souvent des faits de même nature; c'est ainsi, par exemple, que pour construire les racines d'une équation du troisième degré, on trouve utile de l'élever au quatrième degré par l'introduction d'une racine convenablement choisie; ce qui permet de construire les racines par l'intersection d'une parabole et d'une circonférence; c'est ainsi encore que la détermination des trois sommets du triangle polaire conjugué commun à deux coniques dépend de l'intersection de deux coniques que l'on fait passer chacune par un même quatrième point pris à volonté sur le plan.

E. V.

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Par M. A. Parpaite.

Les différentes formes du reste données généralement dans les cours sont des conséquences de la formule

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-p}\,h^n}{\overline{n-1}!\,p}\,f^n(x+\theta h).$$

Il est aisé de faire voir que celle-ci n'est qu'un cas très particulier d'une autre extrêmement générale.

Posons

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{\overline{n-1}!}\,f^{n-1}(x)$$
$$- P\varphi(h) = 0 \qquad (1)$$

x et $x+h$ sont deux valeurs prises entre les limites a, b entre lesquelles $f(x)$ et ses n premières dérivées sont continues; $\varphi(h)$ est une fonction continue de h ainsi que sa dérivée entre les limites où h se trouve compris, $\varphi(h)$ est en outre assujettie à la condition $\varphi(o) = o$; P est une certaine fonction de x et de h à déterminer pour que l'égalité (1) ait lieu.

Remplaçons h par $x_1 - x$ dans (1); nous avons

$$f(x_1) - f(x) - (x_1 - x) f_1(x) - \dots - \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(x) - \mathrm{P}\varphi(x_1 - x) = o. \quad (2)$$

Mettons partout, *excepté dans* P, z au lieu de x et faisons varier z, la fonction

$$\mathrm{F}(z) = f(x_1) - f(z) - (x_1 - z) f'(z) - \dots - \frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(z) - \mathrm{P}\varphi(x_1 - z) \quad (3)$$

est nulle pour $z = x$ ainsi que pour $z = x_1$, dans l'intervalle elle est continue; il en est de même de sa dérivée; donc il existe au moins une valeur intermédiaire de z, $x + \theta(x_1 - x)$ qui annule $\mathrm{F}'(z)$, θ étant un nombre compris entre o et 1. Portons cette valeur de z dans la dérivée:

$$\mathrm{F}'(z) = - \frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^n(z) + \mathrm{P}\varphi'(x_1 - z);$$

on déduira

$$\mathrm{P} = \frac{(1 - \theta)^{n-1} (x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} \quad \frac{f^n[x + \theta(x_1 - x)]}{\varphi_1[(1 - \theta)(x_1 - x)]}$$

d'où en remplaçant x_1 par $x + h$

$$\mathrm{R} = \frac{(1 - \theta)\, h^{n-1}\, \varphi(h)}{n - 1!\, \varphi'\, [(1 - \theta)\, h]} f^n(x + \theta h). \quad (4)$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Il est à peine besoin de faire remarquer que si nous posons $\varphi(h) = h^p$

la formule (4) devient

$$\mathrm{R} = \frac{(1 - \theta)^{n-p} h^n}{n - 1!\, p} f^n(x + \theta h)$$

qui est la formule de M. Schlomilch.

Si l'on pose $\varphi(h) = \mathrm{L}(1 + h)$ ou $\sin kh$, etc., on déduira autant de formes du reste qu'on voudra.

CONCOURS D'AGRÉGATION 1881

Solution par M. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

On donne un ellipsoïde. On considère des droites D *telles que si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact,* M *et* M′, *soient dans un même plan.* 1° *Démontrer que la droite* D *et la droite des contacts* MM′ *sont rectangulaires.* 2° *Trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* A. 3° *Ce lieu est un cône du second degré. Trouver le lieu des positions du point* A *pour lesquelles ce cône est de révolution.* 4° *Trouver l'enveloppe* C *des droites* D *qui sont contenues dans un plan donné* P, *et trouver la surface* S *engendrée par* C *quand* P *se déplace parallèlement à un plan donné* Q. 5° *Trouver pour quelle direction de* Q *la surface* S *est de révolution.*

1° Géométriquement, cette propriété est évidente : considérons en effet le plan des deux normales ; il est perpendiculaire à chacun des plans tangents, donc perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la droite D. La droite MM′ qui est dans le plan des deux normales est donc bien perpendiculaire à la droite D.

On peut le démontrer analytiquement de la manière suivante : soient x', y', z' les coordonnées du point M; x'', y'', z'' celles du point M′. La normale au point M à l'ellipsoïde a pour équations $\dfrac{a^2(x-x')}{x'} = \dfrac{b^2(y-y')}{y'} = \dfrac{c^2(z-z')}{z'}$;

ou bien
$$a^2z'x = c^2x'z + (a^2 - c^2)z'x';$$
$$b^2z'y = c^2y'z + (b^2 - c^2)y'z'.$$

Un plan passant par cette normale aura pour équation
$$a^2z'x - c^2x'z - (a^2 - c^2)z'x' + \lambda\,[b^2z'y - c^2y'z - (b^2 - c^2)y'z'] = 0. \qquad (A)$$

Les équations de la normale au point M′ sont
$$x = \frac{c^2x''}{a^2z''}z + \frac{(a^2 - c^2)x''}{a^2};\quad y = \frac{c^2y''}{b^2z''}z + \frac{(b^2 - c^2)}{b^2}y''.$$

Pour qu'un plan $Ax + By + Cz + D = o$ passe par la droite $x = az + p$, $y = bz + q$, il faut que l'on ait $Aa + Bb + C = o$ et $Ap + Bq + D = o$, c'est-à-dire que pour que le plan (A) passe par la normale au point M', on doit avoir $x^2z' \frac{c^2x''}{a^2z''} + \lambda b^2z' \frac{c^2y''}{b^2z''} - c^2(x' + \lambda y') = o$

ou $$\lambda = \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'} \qquad (1)$$

et $$a^2z' \frac{(a^2 - c^2)x''}{a^2} + \lambda b^2z' \frac{(b^2 - c^2)y''}{b^2}$$
$$- z'z[(a^2 - c^2)x + \lambda(b^2 - c^2)y'] = o$$

ou $$(a^2 - c^2)(x'' - x') + \lambda(b^2 - c^2)(y'' - y') = o \qquad (2)$$

En éliminant λ entre les relations (1) et (2), on trouve la condition que doivent remplir les coordonnées des points M et M' pour que les normales en ces points à l'ellipsoïde se rencontrent, savoir :

$$(a^2 - c^2)(x' - x'')(y''z' - y'z'')$$
$$+ (b^2 - c^2)(y' - y'')(z''x' - z'x'') = o. \qquad (B)$$

Les équations de la droite D sont

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = o;$$
$$\frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} + \frac{zz''}{c^2} - 1 = o,$$

ou, sous forme réduite

$$\frac{x}{a^2}(x'y'' - x''y') + \frac{z}{c^2}(y''z' - z''y') = y'' - y',$$

et $$\frac{y}{b^2}(x''y' - x'y'') + \frac{z}{c^2}(z'x'' - z''x') = x'' - x'. \qquad (H)$$

Les conditions de perpendicularité de cette droite avec le plan (A) exigent d'abord que l'on ait

$$\lambda \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'}.$$

Ainsi nous retrouvons pour λ la même valeur qu'en exprimant que le plan (A) passe par la normale en M' à l'ellipsoïde. La deuxième condition est satisfaite d'elle-même, car $x'(y'z'' - y''z') + y'(z'x'' - z''x') + z'(x'y'' - x''y')$ est identiquement nul.

2° Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe A. Les équations des droites D sont alors

$$\frac{x-x_0}{a^2}(x'y''-x''y')+\frac{z-z_0}{c^2}(y''z'-z''y')=0;$$

$$\frac{y-y_0}{b^2}(x''y'-x'y'')+\frac{z-z_0}{c^2}(z'x''-z''x')=0$$

ou bien $$\frac{y''z'-z''y'}{\frac{x-x_0}{a^2}}=\frac{x''y'-x'y''}{\frac{z-z_0}{c^2}}=\frac{z''x'-z'x''}{\frac{y-y_0}{b^2}}.$$

On a d'ailleurs d'après les équations (H) de la droite D

$$\frac{x'-x''}{y'-y''}=\frac{\frac{x_0}{a^2}(x'y''-x''y')+\frac{z_0}{c^2}(y''z'-y'z'')}{\frac{y_0}{b^2}(x''y'-x'y'')+\frac{z_0}{c^2}(z'x''-z''x')}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{z_0x-zx_0}{y_0z-yz_0}.$$

Donc, en tenant compte de la condition (B), le lieu de la droite D est le cône du second degré

$$(a^2-c^2)(x-x_0)(yz_0-zy_0)+(b^2-c^2)(y-y_0)(zx_0-xz_0)=0.$$

On peut écrire l'équation de ce cône comme il suit :

$$(a^2-b^2)z_0(x-x_0)(y-y_0)+(b^2-c^2)x_0(y-y_0)(z-z_0)$$
$$+(c^2-a^2)y_0(z-z_0)(x-x_0)=0.$$

Il en résulte que le lieu est le cône qui passe par les six normales menées du point A à l'ellipsoïde. C'est donc un cône trirectangle passant par l'origine.

3° Pour que ce cône soit de révolution, comme les coefficients des termes en x^2, en y^2 et en z^2 sont nuls, la condition $$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}$$

devient $$\frac{B'B''}{B}=\frac{B''B}{B'}=\frac{BB'}{B''}$$

ou $$B^2=B'^2=B''^2.$$

On doit donc avoir

$$(b^2-c^2)^2x_0^2=(c^2-a^2)^2y_0^2=(a^2-b^2)^2z_0^2,$$

ce qui donne, si l'on considère x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, quatre droites issues de l'origine.

4° Soient $Ax+By+Cz+D=0$ l'équation d'un plan quel-

conque P, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de ce plan. On a $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Les droites D du plan P qui passent par un point donné x_0, y_0, z_0 de ce plan, sont à l'intersection du plan P avec le cône des six normales issues du point considéré à l'ellipsoïde. L'équation du cône est $(a^2-c^2)(x-x_0)(yz_0-zy_0)+(b^2-c^2)(y-y_0)(zx_0-xz_0) = 0$. D'ailleurs

$$z = -\frac{Ax+By+D}{C} \text{ et } z_0 = -\frac{Ax_0+By_0+D}{C}.$$

Par conséquent l'équation de la projection du système des deux droites D considérées sur le plan des xy sera

$$(a^2-c^2)(x-x_0)[y_0(Ax+By+D)-y(Ax_0+By_0+D)]$$
$$+(b^2-c^2)(y-y_0)[x(Ax_0+By_0+D)-x_0(Ax+By+D)]$$
$$=0$$

ou $(a^2-c^2)(x-x_0)[Ax(y_0-y)+Ay(x-x_0)+D(y_0-y)]$
$+(b^2-c^2)[Bx(y_0-y)+By(x-x_0)+D(x-x_0)] = 0$

ou enfin

$$(a^2-c^2)Ay(x-x_0)^2+(c^2-b^2)Bx(y-y_0)^2-[(a^2-c^2)$$
$$Ax+(c^2-b^2)By-(b^2-a^2)D](x-x_0)(y-y_0)=0.$$

Prenons les dérivées partielles de ces équations par rapport aux binômes $y-y_0$, $x-x_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2(a^2-c^2)Ay(x-x_0) \\ =[(a^2-c^2)Ax+(c^2-b^2)By-(b^2-a^2)D](y-y_0); \\ 2(c^2-b^2)Bx(y-y_0) \\ =[(a^2-c^2)Ax+(c^2-b^2)By-(b^2-a^2)D](x-x_0). \end{array}\right.$$

Multiplions membre à membre et nous aurons pour les équations de l'enveloppe

$$4(a^2-c^2)(c^2-b^2)AB\,xy = [a^2-c^2)Ax+(c^2-b^2)By$$
$$-b^2-a^2)D]^2 \text{ avec } Ax+By+Cz+D=0.$$

L'enveloppe est donc une parabole. L'équation générale d'un plan parallèle au point Q étant $Ax+By+Cz+\lambda=0$, pour avoir l'équation de la surface engendrée par la parabole enveloppe des droites D lorsque P se déplace parallèlement au plan Q, il suffira d'éliminer le paramètre variable D entre l'équation de la parabole et du plan P. Cette surface a donc pour équation

$$4(a^2-c^2)(c^2-b^2)AB\,xy$$
$$=[(a^2-c^2)Ax+(c^2-b^2)By+(b^2-a^2)(Ax+By+Cz)]^2$$

ou
$$4(a^2-c^2)(c^2-b^2)\,ABxy = [(b^2-c^2)Ax + (c^2-a^2)By + (b^2-a^2)Cz]^2.$$

Cette équation représente un cône du second degré ayant pour sommet l'origine et tangent aux plans de coordonnées, tout le long des droites

$(c^2-a^2)By + (b^2-a^2)Cz = 0$, pour l'un;
$(b^2-c^2)Ax + (b^2-a^2)Cz = 0$, pour l'autre;
$(b^2-c^2)Ax + (c^2-a^2)By = 0$, pour le troisième.

5° Enfin les conditions qui doivent exister entre A, B, C pour que le cône soit de révolution sont
$$(b^2-c^2)^2A^2 = (c^2-a^2)B^2 = (b^2-a^2)^2C^2.$$

Remarques. — I. Considérons toutes les droites D qui passent par un point fixe A, et parmi ces droites, situées sur le cône des six normales issues de A, considérons-en une extérieure à l'ellipsoïde. Soit δ sa trace sur le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde. Si je joins δ aux points M et M′, les deux droites δM et δM′ seront tangentes à la section faite dans l'ellipsoïde par le plan polaire de A. Donc la droite MM′ ou Δ est la polaire du point δ par rapport à l'ellipse e. Il en résulte que tous les plans passant par D auront leur pôle sur Δ et que tous les plans passant par Δ auront leur pôle sur D (*).

Considérons maintenant une droite (D) passant par le point A, et coupant l'ellipsoïde. La droite Δ est toujours la polaire de δ. Elle est alors extérieure à l'ellipsoïde. Puisque tout plan passant par Δ a son pôle sur D, les plans tangents à l'ellipsoïde menés par Δ auront pour points de contact les points N et N′ où la droite D coupe l'ellipsoïde, de sorte que les rôles sont renversés, que la droite D joue le rôle de Δ et inversement; d'où les conclusions suivantes:

1° Lorsque les droites D sont assujetties à passer par un point fixe A, et à rester, comme nous l'avons montré, sur le cône des six normales correspondant à ce point, les droites Δ sont assujetties à rester dans un plan fixe, le plan polaire de A, et leur enveloppe dans ce plan est une parabole.

2° Lorsque les droites D sont assujetties à rester dans un

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

plan fixe P tangentiellement à la parabole que nous avons déterminée, les droites Δ sont toutes sur le cône des six normales qui a pour sommet le pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde.

II. Si l'ellipsoïde donné était de révolution, si l'on avait $a = b$, ou $b = c$, ou $c = a$, le lieu des droites D passant par un point donné serait un système de deux plans.

Si l'on supposait à la fois $a = b = c$, la condition (B) est remplie quelle que soit la droite D prise dans l'espace. Dans une sphère, en effet, toutes les normales à la surface se rencontrent au même point, le centre.

Dans un ellipsoïde de révolution, toutes les normales rencontrent l'axe. Deux normales ne peuvent se rencontrer qu'en un point de l'axe; les droites Δ et les droites D sont donc assujetties à être dans des plans perpendiculaires à l'axe, ce qui démontre que les droites D passant par un point fixe sont toutes dans le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce point.

NOTA. — Nous avons reçu également une solution de ce même problème par M. Cadot, élève au Lycée Saint-Louis.

QUESTION 2

Solution par M. Kœhler.

Deux paraboles variables sont assujetties : 1° à avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'un de l'autre; 2° à se couper orthogonalement en deux points.

Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes.

Soit $y^2 = 2px$ l'une des paraboles ; b étant la distance des deux axes, l'autre aura pour équation $(y - b)^2 = 2q(x - \alpha)$. Les ordonnées des points communs sont données par

$$y^2(p - q) - 2bpy + p(b^2 + 2q\alpha) = 0. \qquad (1)$$

Les coefficients angulaires des tangentes en un des points d'intersection sont $\frac{p}{y}$ et $\frac{q}{y - b}$; pour que les paraboles

soient orthogonales, on doit avoir la relation

$$y^2 - by + pq = 0. \qquad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) qui doivent avoir les mêmes racines donne

$$q = -p,\ \alpha = \frac{b^2 + 2p^2}{2p}.$$

L'équation de la seconde parabole devient alors

$$y^2 - 2by + 2px - 2p^2 = 0\ ;$$

p doit être considéré comme un paramètre variable, et nous allons le déterminer de telle sorte que l'aire comprise entre les deux courbes soit minima.

L'équation de la corde commune est

$$by - 2px + p^2 = 0.$$

Sa longueur se calcule facilement et a pour expression

$$c = \frac{4p^2 + b^2}{2p}.$$

Les pôles de la corde sont

$\alpha_1 = -\frac{p}{2},\ \beta_1 = \frac{b}{2}$, par rapport à la première parabole,

$\alpha_2 = \frac{b^2 + 3p^2}{2p},\ \beta_2 = \frac{b}{2}$, par rapport à la deuxième.

Chacun de ces pôles est distant de la corde commune d'une longueur $h = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4p^2}$. On en conclut que l'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est $\frac{4(p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{4p}$, et l'aire comprise entre les deux paraboles est

$$S = \frac{1}{6p}(4p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette expression est minimum quand on prend $p = \frac{b}{2\sqrt{2}}$ et la valeur de S est alors $\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$.

QUESTION 15 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Équation du cône ayant pour sommet le centre d'une surface de deuxième ordre et admettant pour génératrices les trois axes de coordonnées rectangulaires et les trois axes de la surface.

Comme le cône contient les trois axes de coordonnées, son équation est de la forme

$$byz + b'zx + b''xy = 0. \qquad [1]$$

Soient $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$, $\frac{x}{\alpha_2} = \frac{y}{\beta_2} = \frac{z}{\gamma_2}$, $\frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3} = \frac{z}{\gamma_3}$ les trois axes de la surface; pour exprimer qu'ils sont sur le cône, il suffit d'exprimer qu'il y en a deux sur le cône, ce qui donne

$$b\beta_1\gamma_1 + b'\gamma_1\alpha_1 + b''\alpha_1\beta_1 = 0 \qquad [2]$$
$$b\beta_2\gamma_2 + b'\gamma_2\alpha_2 + b''\alpha_2\beta_2 = 0 \qquad [3]$$

Soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1$ l'équation de la surface.

Posant $\lambda = A - \frac{B'B''}{B}$, $\lambda' = A' - \frac{B''B}{B'}$, $\lambda'' = A'' - \frac{BB'}{B''}$, on sait qu'on a

$$\frac{\alpha_1}{\dfrac{1}{B(\lambda - S_1)}} = \frac{\beta_1}{\dfrac{1}{B'(\lambda' - S_1)}} = \frac{\gamma_1}{\dfrac{1}{B''(\lambda'' - S_1)}},$$

en désignant par S_1 la racine de l'équation en S correspondant à $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

Remplaçant dans (2) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par ces quantités proportionnelles, on a

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - S_1)(\lambda'' - S_1)} + \frac{b'}{B''B(\lambda'' - S)(\lambda - S_1)} + \frac{b''}{BB'(\lambda - S_1)(\lambda' - S_1)} = 0,$$

ou $\quad Bb(\lambda - S_1) + B'b'(\lambda' - S_1) + B''b''(\lambda'' - S_1) = 0. \quad [4]$

On a de même

$$Bb(\lambda - S_2) + B'b'(\lambda' - S_2) + B''b''(\lambda'' - S_2) = 0. \qquad [5]$$

Par soustraction, on déduit $(S_1 - S_2)(Bb + B'b' + B''b'') = 0$. D'ailleurs $S_1 \gtrless S_2$, sans quoi la surface proposée serait de révolution, ce qu'on ne suppose pas.

On a donc $\qquad Bb + B'b' + B''b'' = 0, \qquad$ [6]

(4) devient $\qquad B\lambda b + B'\lambda'b' + B''\lambda''b'' = 0. \qquad$ [7]

On en déduit

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - \lambda'')} = \frac{b'}{B''B(\lambda'' - \lambda)} = \frac{b''}{BB'(\lambda - \lambda')}.$$

Finalement l'équation demandée est donc

$$\frac{B'B''(\lambda' - \lambda'')}{x} + \frac{B''B(\lambda'' - \lambda)}{y} + \frac{BB'(\lambda - \lambda')}{z} = 0$$

QUESTION 16 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Ayant posé.

$$\left\{\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= P_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= P_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= P_3 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} z + a_2y + a_3z &= Q_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= Q_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= Q_3 \end{aligned}\right. \quad \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

supposant que $\delta \gtrless 0$, *démontrer que les deux ellipsoïdes*

$$\left.\begin{aligned} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 &= 1 \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \textit{ sont égaux.}$$

Il s'agit de démontrer que les axes de ces deux ellipsoïdes sont deux à deux égaux. Or, on sait que a, b, c étant les axes du premier, S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation en S_1, on a $\dfrac{a^2}{\frac{1}{S_1}} = \dfrac{b^2}{\frac{1}{S_2}} = \dfrac{c^2}{\frac{1}{S_3}} = 1$. De même, a', b', c' étant les axes du deuxième, S'_1, S'_2, S'_3 les racines de l'équation en S corrrespondante, on a $\dfrac{a'^2}{\frac{1}{S'_1}} = \dfrac{b'^2}{\frac{1}{S'_2}} = \dfrac{c'^2}{\frac{1}{S'_3}} = 1$.

Si nous pouvons démontrer que les deux équations en S ont les mêmes racines, il en résultera bien que les axes sont égaux. D'ailleurs, le coefficient de S^3 étant 1 pour les deux, il s'agit de montrer que les coefficients sont deux à deux égaux.

Les équations des deux ellipsoïdes sont

$$x^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + y^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + z^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$
$$+ 2yz(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + 2zx(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)$$
$$+ 2xy(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = 1. \quad [1]$$
$$x^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + y^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + z^2(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)$$
$$+ 2yz(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) + 2zx(a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1)$$
$$+ 2xy(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) = 1. \quad [2]$$

Pour abréger, écrivons ces équations sous la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1. \quad [1]$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 1. \quad [2]$$

Les équations en S correspondantes sont

$$S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2)$$
$$- \Delta = 0.$$
$$S^3 - (a + a' + a'')S^2 + (a'a'' + a''a + aa' - b^2 - b'^2 - b''^2)$$
$$- \Delta' = 0.$$

On a d'abord $A + A' + A'' = a + a' + a''$.

$$A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$
$$+ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$$
$$- (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Appliquant l'identité de Lagrange, on a

$$A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2$$
$$\left.\begin{aligned} &= (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + b_2c_3 - c_2b_3)^2 \\ &+ (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (c_2a_3 - a_2c_3)^2 + c_3a_1 - a_2c_1)^2 \\ &+ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \end{aligned}\right\} = \Sigma(a_1b_2 - b_1a_2)^2$$

En calculant $a'a'' + a''a + aa' - b^2 - b'^2 - b''^2 = 0$, on trouve la même valeur $\Sigma(a_1b_2 - b_1a_2)^2$.

Enfin calculons le terme tout connu,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, & a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2 \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

Δ et Δ' ne sont autre chose que le carré du déterminant δ : donc ils sont égaux. Par suite, les équations en S sont iden-

tiques ; pour les deux surfaces on a

$$S^3 - (\Sigma a_1^2)\, S^2 + \Sigma\,(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2\, S - \delta^2 = 0.$$

NOTA. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Griffon, à Montpellier ; Thérel, à Versailles.

QUESTION 355

Solution par M. QUIQUET, élève au Lycée de Lille.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0 \qquad (1)$$

pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

Formons les deux équations du troisième degré qui admettent, pour racines, la première trois racines de (1), la seconde les trois autres, et écrivons-les sous la forme :

$$x^3 + lx^2 + mx + n = 0$$
$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0.$$

On a donc identiquement :

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U$$
$$= (x^3 + lx^2 + mx + n)(x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu)$$

d'où les relations

$$P = l + \lambda$$
$$Q = l\lambda + m + \mu$$
$$R = l\mu + m\lambda + n + \nu$$
$$S = l\nu + n\lambda + m\mu$$
$$T = m\nu + n\mu$$
$$U = n\nu.$$

Pour que la somme de trois des racines de (1) soit égale à la somme des trois autres, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer l et λ, de telle manière que l'on ait $l = \lambda$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée s'obtiendra donc en éliminant $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, entre cette dernière relation et les six précédentes.

Posons : $\qquad l = \lambda = L$

d'où
$$P = 2L$$
$$Q = L^2 + m + \mu$$
$$R = L(m + \mu) + n + \nu$$
$$S = L(n + \nu) + m\mu$$
$$T = m\nu + n\mu$$
$$U = n\nu$$

et, en introduisant des fonctions connues des paramètres de (1), M, N, V, on tire de là :

$$L = \frac{P}{2}$$
$$m + \mu = Q - L^2 = M$$
$$n + \nu = R - LM = N$$
$$m\mu = S - LN = V.$$

Remarquant d'ailleurs l'identité :

$$(m\nu + n\mu)[(m + \mu)(n + \nu) - (m\nu + n\mu)] = n\nu(m + \mu)^2 + m\mu(n + \nu)^2 - 4mn\mu\nu$$

l'élimination se fait immédiatement et donne pour le résultat demandé $T(MN - T) = UM^2 + VN^2 - 4UV$.

On peut remarquer que les quantités $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, s'obtiennent par des équations du premier et du second degré, en fonction des coefficients de (1). Cette remarque peut servir à abaisser le degré d'une équation telle que (1), lorsque la condition ci-dessus est satisfaite.

NOTE SUR LA QUESTION 42

Le problème résolu à la page 69 du numéro de mars 1883, question 42, doit, sans peine, être généralisé de la manière suivante :

D'un point fixe O comme centre, décrivez une circonférence de rayon arbitraire, et menez-lui des tangentes par un point fixe A et par un point fixe B; ces deux couples de tangentes se coupent en quatre points M; le lieu de ces points M, quand varie le rayon de la circonférence, est une courbe bien connue qui se nomme la *Focale à nœud* de Quételet; M. *Chasles* en parle dans un de ses mémoires bien connus; c'est aussi le lieu des points de contact des tangentes menées

d'un point fixe à une série de coniques homofocales, et c'est aussi la podaire d'un point fixe relativement à une parabole.

Cette remarque nous semble utile pour nos lecteurs qui peuvent s'exercer sur le problème ainsi posé, et y trouver l'occasion de développer leur sagacité algébrique ou géométrique. E. V.

QUESTIONS PROPOSÉES

56. — Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangente à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde. *(J. Kœhler.)*

57. — Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement. *(J. Kœhler.)*

58. — On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; 2° soit M un point quelconque de C; on joint OM, et on trace une droite Δ symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle des axes; cette droite Δ rencontre la perpendiculaire élevée au point M à la droite OM en un point I. Démontrer que le lieu géométrique de ce point I est une hyperbole équilatère; 3° sur OI, on prend OI' = MI. Démontrer que le lieu du point I' est un cercle. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT

D'APRÈS M. WALECKI

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — M. Walecki a communiqué à l'Académie des sciences, dans la séance du 19 mars dernier, une démonstration du théorème de d'Alembert. Cette démonstration nous paraît à l'abri de toute objection et nous nous proposons de la développer dans cette note. Cette rédaction est faite d'après le résumé très écourté qui a été publié dans les comptes rendus; la démonstration détaillée sera donnée sans doute, ultérieurement, par l'auteur. Il est possible qu'elle s'écarte un peu de celle que nous allons exposer; mais nous pensons être agréable à nos lecteurs en publiant dès aujourd'hui une démonstration qui touche à un point si important de la théorie des équations et qui, jusqu'ici, n'avait été élucidé, du moins élémentairement, que par des raisonnements qui laissaient prise aux objections.

2. — Principe. — *Pour démontrer qu'une équation du degré* p, *à coefficients imaginaires, admet une racine* $\alpha + \beta i$, *il suffit de reconnaître qu'une équation du degré* 2p, *à coefficients réels, admet une racine de cette forme.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Par un groupement convenable on peut toujours l'écrire sous la forme

$$U + Vi = 0, \qquad (1)$$

U et V désignant deux polynômes entiers à coefficients réels, dont l'un au moins est du degré p.

Considérons maintenant l'équation

$$U^2 + V^2 = 0, \qquad (2)$$

laquelle est du degré $2p$ et à coefficients réels.

On a, identiquement,

$$U^2 + V^2 = (U + Vi)(U - Vi).$$

Si $\alpha + \beta i$ est une racine de l'équation (2), de deux choses l'une : ou $\alpha + \beta i$, substitué à x, rend nul le premier facteur

$U + Vi$, et alors la proposition est établie ; ou, au contraire. $\alpha + \beta i$ est racine de l'équation $U - Vi = 0$. Dans ce cas, $\alpha - \beta i$ est racine de l'équation (1). Ainsi, dans tous les cas, $U + Vi = 0$ admet une racine, si l'équation $U^2 + V^2 = 0$, en admet une.

3. — Lemme. — *Lorsque dans une équation* $f(x) = 0$, *du degré* $2p$, *on remplace* x *par* $y + z$, *si l'on pose identiquement,*

$$f(y + z) = f_1(z^2) + zf_2(z^2),$$

le résultant des deux formes $f_1(z^2)$ *et* $f_2(z^2)$ *est du degré* $p(2p - 1)$, *en* y.

Soit $m = 2p$, le degré de l'équation proposée ; on a

$$f_1(z^2) = f(y) + \frac{z^2}{2!} f''(y) + \dots + \frac{z^m}{m!} f^m(y)$$

et $$f_2(z^2) = f'(y) + \frac{z^2}{3!} f'''(y) + \dots + \frac{z^{m-2}}{(m-2)!} f^{m-1}(y);$$

on remarque que les équations $f_1(z^2) = 0$ et $f_2(z^2) = 0$ sont, par rapport à la lettre z^2, de degrés respectifs p et $(p - 1)$.

Le résultant $R(y)$, est, par une formule connue,

$$R(y) = \begin{vmatrix} f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \dots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \dots & \frac{f^m(y)}{m!} & & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & & \dots & & \frac{f^m(y)}{m!} \\ f'(y) & \dots & & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f'(y) & \dots & & \frac{f^{m-1}(y)}{m-1} & & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & f'(y) & & \dots & & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} \end{vmatrix}$$

Les éléments de ce déterminant sont des polynômes entiers en y, et le terme du degré le plus élevé de $R(y)$ s'obtiendra en prenant, dans chacun d'eux, le terme qui est du plus haut degré.

Posons

$$\theta(y) = \begin{vmatrix} y & C_m^2 y^{m-2} & \ldots & C_m^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \ldots & C_m^m & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \ldots & C_m^m \\ C_m^1 y^{m-1} & \ldots & \ldots & C_m^{m-1} y & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \ldots & & C_m^{m-1} y & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & C_m^{m-1} y \end{vmatrix}$$

Je dis que $\theta(y)$ ne renferme qu'un terme en y et que ce terme est du degré $p(2p - 1)$.

Considérons en effet les deux équations

$$\frac{(y + t)^m + (y - t)^m}{2} = y^m + C_m^2 y^{m-2} t^2 + \ldots + C_m^m t^m = 0$$

$$\frac{(y + t)^m - (y - t)^m}{2t} = C_m^1 y^{m-1} + C_m^3 y^{m-3} t^2 + \ldots + C_m^{m-1} y t^{m-2} = 0$$

Si on élimine t, le résultant de ces deux équations est précisément $\theta(y)$. Ces équations étant d'ailleurs homogènes en y et t, $\theta(y)$ est, certainement, une expression ne renfermant qu'un terme en y. D'autre part, le terme diagonal de $\theta(y)$ est

$$(y^m)^{p-1}(C_m^{m-1} y)^p,$$

ou

$$m^p y^{2p(p-1)+p},$$

ou encore

$$m^p y^{p(2p-1)}.$$

Ainsi $\theta(y)$ est du degré $p(2p - 1)$, et l'on peut poser

$$\theta(y) = H y^{p(2p-1)}.$$

Il reste maintenant à vérifier que H est un nombre différent de zéro.

On a, en effet $\qquad \theta(1) = H$

et si l'on avait $H = 0$, les deux équations

$$\frac{(t + 1)^m + (t - 1)^m}{2} = 0;$$

$$\frac{(t + 1)^m - (t - 1)^m}{2t} = 0;$$

auraient un diviseur commun qui appartiendrait à $(t' + 1)^m$ et $(t' - 1)^m$, ce qui est impossible.

4. — Théorème de d'Alembert. — *Toute équation algébrique a une racine.*



Nous distinguons, dans la démonstration qui suit, deux cas suivant que le degré de l'équation proposée est pair ou impair.

Premier cas. — *Le degré* μ *de l'équation proposée* $F(x) = 0$ *est un nombre impair.*

Si les coefficients de $F(x)$ sont réels. le théorème qui nous occupe est évident. Supposons donc qu'ils soient imaginaires et soit
$$F(x) = U + Vi.$$
Posons
$$f(x) = U^2 + V^2.$$
En conservant la notation du paragraphe précédent on a
$$f(x) = f_1(z^2) + zf_2(z^2).$$
Les polynômes $f_1(z^2)$ et $f_2(z^2)$ ne peuvent pas être, en même temps, identiquement nuls. Si l'un d'eux est identiquement nul, ce sera $f_2(z^2)$, puisque le premier terme de $f_1(z^2)$ est $A_0 z^{2\mu}$; $A_0 x^{2\mu}$ désignant le premier terme de $f(x)$.

Supposons d'abord que $f_2(z^2)$ soit identiquement nul. L'équation $f_1(z^2) = 0$ est du degré μ en X, après avoir posé $z^2 = X$. Comme μ est impair, l'équation $f_1(X) = 0$ admet au moins une racine ; le polynôme $f_1(X)$ est divisible par un facteur du premier degré en X ; par suite, $f(x)$ admet un diviseur du second degré en x.

Admettons maintenant que $f_2(z^2)$ ne soit pas identiquement nul. L'équation $R(y) = 0$ est, comme nous l'avons remarqué plus haut, du degré $p(2p - 1)$; ce nombre est impair et l'on peut dire que cette équation a une racine. Les polynômes f_1 et f_2 ont donc un diviseur commun et $f(x)$ est certainement décomposable en un produit de deux facteurs U_1, V_1.

Si l'un de ces facteurs est de degré impair, il admet un diviseur réel du premier degré ; par suite $f(x)$ a une racine réelle.

Si, au contraire U_1 et V_1 sont, l'un et l'autre, de degrés pairs : soient $2q$ et $2q'$ leurs degrés, je dis que l'un des nombres, q ou q', est impair.

On a en effet
$$2p = 2q + 2q'$$
ou
$$p = q + q'$$
et comme p est impair, q et q' sont des nombres de parités différentes. L'un d'eux, en particulier, est un nombre impair :

supposons que ce soit q. En raisonnant sur U_1 comme nous l'avons fait sur $f(x)$ on fera voir, de même, que U_1 (par conséquent $f(x)$) admet un diviseur réel du premier ou du second degré, ou, s'il n'en est pas ainsi, que U_1 admet du moins un diviseur U_2 qui est réel et d'un degré $2r$, r étant un nombre impair.

Ce dernier cas, celui où le diviseur n'est ni du premier ni du second degré, ne peut d'ailleurs se présenter indéfiniment les degrés des polynômes U_1, U_2, ... allant en décroissant.

Il y a donc, en résumé, un diviseur de la forme $(x - \alpha - \beta i)$ au polynôme $U + Vi$, lorsque celui-ci est d'un degré impair.

« **Deuxième cas** (*). — *Le degré* μ, *de l'équation* $f(x) = 0$, *est un nombre pair.*

» Considérons maintenant une équation à coefficients réels ou imaginaires dont le degré μ soit égal à $2^i p$, p étant un nombre impair.

» Pour abréger je dirai que le nombre m est de parité i, et je vais démontrer que, si le théorème est établi pour toutes les équations dont le degré est de parité inférieure à i, il est encore vrai pour une équation de parité i ; il sera, par suite, établi dans toute sa généralité, puisqu'il est vrai pour la parité zéro.

» Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation ; posons

$$x = y + z \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2)$$

» Le résultat de φ et de ψ est du degré $\dfrac{m(m-1)}{2} = 2^{i-1}p$ $(2^i p - 1)$ par rapport à y ; il est donc de la parité $(i - 1)$ et, par suite, s'annule par une valeur réelle ou imaginaire de y. En remarquant que φ est de parité $(i - 1)$, on prouvera, comme plus haut, que $f(x)$ admet un diviseur du premier ou du second degré à coefficients réels ou imaginaires, ou un diviseur U_1, de parité i, mais de degré inférieur à celui de $f(x)$; on prouvera également que U_1 admet un diviseur du premier ou du second degré, ou un diviseur U_2 de parité i et d'un degré inférieur à celui de U_1. En continuant ces opérations,

(1) Cette dernière partie est extraite textuellement des *Comptes rendus (loc. cit.)*

il est clair, puisque le dernier cas ne peut se présenter indéfiniment, que l'on déterminera un diviseur de $f(x)$ du premier ou du second degré, et, comme l'on sait qu'une équation du second degré à coefficients imaginaires est décomposable en facteurs du premier degré, la proposition énoncée est entièrement démontrée. »

Remarque — Cette démonstration repose, comme on a pu le remarquer :

1° Sur le déterminant de Sylverter, qui donne la condition nécessaire pour que deux polynômes admettent un diviseur commun ;

2° Sur la réciproque de cette proposition. On sait que cette proposition peut s'établir sans admettre la décomposition des polynômes en facteurs. Sans cette observation, la démonstration précédente ne serait pas admissible.

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Nous nous proposons d'exposer dans cette note une méthode de résolution de l'équation du troisième degré qui nous paraît offrir, sur les méthodes connues, certains avantages.

L'idée qui nous sert de point de départ est naturelle et nous dirons d'abord en quoi elle consiste. Soit (1) $f(x) = o$ l'équation proposée. Supposons qu'elle soit du degré m et qu'on puisse l'écrire identiquement sous la forme

$$P^m Q - {}^m = o, \qquad (2)$$

P et Q désignant des fonctions entières de x, du premier ou du second degré, tout au plus. La résolution algébrique de l'équation (1) se trouve ramenée à celle de l'équation binôme $z^m - 1 = o$, en posant $z = \dfrac{P}{Q}$.

Cette idée, en définitive, est celle qui a servi à résoudre

les équations du second degré, quand on a écrit l'identité

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

C'est aussi celle qui préside à la résolution de l'équation du quatrième degré quand on expose la méthode classique de Ferrari. N'est-il pas naturel de l'appliquer au cas du troisième degré ? De cette façon la résolution algébrique des équations, dans le cas où elle est possible, se trouverait découler d'un seul et même principe.

La méthode dont nous parlons conduit, chose remarquable, à une résolvante du second degré. Le calcul qu'elle exige est un peu plus compliqué que celui que nécessite la méthode de Hudde; mais la discussion des valeurs trouvées se fait plus simplement par cette méthode qui, somme toute, nous paraît préférable.

2. — Soit $$x^3 + px + q = 0 \qquad (3)$$
l'équation proposée. Nous allons chercher à l'identifier avec l'équation

$$(\alpha + \beta x)^3 - (x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3) = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$x^3(\beta^3 - 1) + 3(\beta^2\alpha - \lambda)x^2 + 3(\alpha^2\beta - \lambda^2)x + \alpha^3 - \lambda^3 = 0. \qquad (4)$$

Pour identifier (3) et (4), il faut supposer β différent de l'unité, et poser

$$\beta^2\alpha = \lambda \qquad (5)$$

$$\frac{p}{3}(\beta^3 - 1) = \alpha^2\beta - \lambda^2 \qquad (6)$$

$$q(\beta^3 - 1) = \alpha^3 - \lambda^3. \qquad (7)$$

On peut considérer ces équations comme formant un système de trois équations à trois inconnues : p et q sont les nombres donnés; α, β et λ sont les inconnues.

De (5) tirons α; cette valeur, substituée dans (6) et dans (7), donne d'abord

$$-\frac{p}{3}\beta^3 = \lambda^2 \qquad (8)$$

$$-q\,\beta^6 = \lambda^3(\beta^3 + 1); \qquad (9)$$

puis, en éliminant β^3, entre les deux relations,

$$3\lambda^2 p - 9q\lambda - p^2 = 0. \qquad (A)$$

C'est la résolvante; on remarquera qu'elle est du second degré. Les équations (6) et (8) donnent

$$\alpha^2\beta = -\frac{p}{3}. \qquad (10)$$

On a donc, par combinaison de (5) et de (10),

$$p\beta + 3\alpha\lambda = 0; \qquad (B)$$

et enfin

$$\alpha^3 = \frac{p^2}{9\lambda}. \qquad (C)$$

3. — Ainsi la résolution de l'équation proposée se trouve réalisée par celle : 1° d'une équation du second degré (A); 2° d'une équation du premier degré (B); 3° d'une équation binôme du troisième degré (C).

En désignant par j l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, les racines x_1, x_2, x_3 sont données par les formules

$$\alpha + \beta x_1 = x_1 + \lambda,$$
$$\alpha + \beta x_2 = j(x_2 + \lambda),$$
$$\alpha + \beta x_3 = j^2(x_3 + \lambda).$$

Remplaçons $y\lambda$ par $\beta^2\alpha$, on trouve facilement en tenant compte de l'hypothèse $j^3 = 1$,

$$x_1 = \alpha(\beta + 1), \qquad (11)$$
$$x_2 = \alpha j^2(\beta j^2 + 1), \qquad (12)(D)$$
$$x_3 = \alpha j(\beta j + 1). \qquad (13)$$

4. — Discussion. — Soit λ' l'une des racines de la résolvante (A); à cette racine, et d'après la formule (C), correspondent pour α trois valeurs qu'on peut représenter par α, αj, αj^2. D'ailleurs la relation (B) prouve que si l'on change α en αj, ou en αj^2, β prend les valeurs correspondantes βj ou βj^2. Par suite, les formules (D) ne peuvent donner que trois valeurs pour x. Mais la résolvante admet deux racines λ', λ'' et la discussion qui va suivre a pour but de montrer que la deuxième racine λ'' donne les mêmes valeurs pour x.

Pour établir ce point, remarquons d'abord que l'on a

$$\lambda'\lambda'' = -\frac{p}{3}.$$

D'autre part, à la racine λ'' correspond un nombre α' déterminé par la relation

$$\alpha'^3 = \frac{p^2}{9\lambda''},$$

et comme
$$\alpha^3 = \frac{p^2}{9\lambda'},$$

on a
$$\alpha^3\alpha'^3 = \frac{p^4}{81} \cdot \frac{1}{\lambda'\lambda''}$$

ou
$$\alpha^3\alpha'^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

On a donc successivement

$$\alpha\alpha' = -\frac{p}{3}, \quad \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j \text{ et } \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j^2.$$

La formule (11) donne, en tenant compte de la relation (10),

$$x_1 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}.$$

Cette formule ne change pas quand on remplace α par $-\frac{p}{3\alpha}$; si nous remplaçons maintenant α par $-\frac{pj}{3\alpha}$, on obtient

$$X_1 = -\frac{pj}{3\alpha} + \frac{p}{3} \cdot \frac{3\alpha}{pj}.$$

ou
$$X_1 = \frac{\alpha}{j} - \frac{pj}{3\alpha}$$

ou encore, en remarquant que $j^3 = 1$,

$$X_1 = \alpha j^2 - \frac{p}{3\alpha j^2}.$$

Mais on a
$$x_2 = \alpha j^2 + \alpha\beta j^4$$

ou, d'après (10),
$$x_2 = \alpha j^2 - \frac{pj}{3\alpha}.$$

On voit donc que $X_1 = x_2$.

On reconnaît de même qu'en remplaçant α par $-\frac{pi}{3\alpha}$ la formule (11) donne la valeur de x_3.

Le même raisonnement appliqué aux deux autres formules (12) et (13) du groupe (D), prouve que l'on retrouve toujours les seuls nombres x_1, x_2, x_3, et il n'y a pas d'autre solution que ces trois racines pour l'équation proposée.

5. — Ces trois racines sont données par la formule

$$x = \theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{p}{3\theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

dans laquelle on donne successivement à θ les valeurs 1, j et j^2.

En effet, la résolvante A, écrite sous la forme

$$p^2\frac{1}{\lambda^2} + 9q\frac{1}{\lambda} - 3p = 0,$$

donne
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-9q \pm \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{2p^2}.$$

Nous avons montré tout à l'heure qu'on pouvait prendre indifféremment, dans cette formule, le signe + ou le signe —: nous ferons donc choix du signe + et nous aurons alors pour $\frac{1}{\lambda}$ une valeur bien déterminée correspondant à la formule $\frac{p^2}{9\lambda} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

La formule (C) donne

$$\alpha\theta = \sqrt{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

θ ayant successivement, dans cette expression, les valeurs $1, j, j^2$. L'inconnue x étant donnée par l'équation

$$x = \alpha - \frac{p}{3\alpha},$$

on a donc enfin

$$x = \theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{p}{3\theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

$\theta = (1, j, j^2)$.

C'est la formule à laquelle conduit **la méthode de Hudde** et c'est, à l'apparence près, la formule de Cardan.

QUESTION 44

Solution par M. CALLÉ, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble (classe de M. Bernard).

On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées : d'un point P *dont les coordonnées sont* α, β, *on abaisse des normales à ces coniques. Lieu des pieds. — En désignant par* $2a$ *la longueur d'une diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en* P, *et que l'équation de cette courbe est*

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2 (\alpha - x)(\beta - y),$$

ou encore :

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2] = 0,$$

— Discuter cette courbe. — Séparer sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles.

G. L.

Les diagonales du carré sont les axes communs au faisceau considéré; si A^2 et B^2 sont des paramètres variables, l'équation générale sera

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'hyperbole des pieds des normales est

$$(A^2 - B^2) xy - A^2\alpha y + B^2\beta x = 0; \qquad (2)$$

$2a$ étant la longueur d'une diagonale, l'équation d'un côté du carré est : $x + y - a = 0$.

Exprimons que cette droite est tangente à la conique (1), et pour cela exprimons que l'équation

$$\frac{(a - y)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0,$$

a une racine double; il vient

$$A^2 + B^2 = a^2. \qquad (3)$$

Éliminons A et B, entre les équations (1), (2) et (3); nous

aurons le lieu. — De (2) et (3) on tire

$$A^2 = \frac{a^2x(\beta - y)}{\beta x + \alpha y - 2xy}; \quad B^2 = \frac{a^2y(\alpha - x)}{\beta x + \alpha y - 2xy}.$$

Portant ces valeurs dans (1), il vient

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\beta y + \alpha x - x^2 + y^2) - a^2(\alpha - x)(\beta - y) = 0. \quad (4)$$

($\alpha.\beta$) est un point double. Transportons l'origine en ($\alpha.\beta$). L'équation devient :

$$(\beta x + \alpha y + 2xy)(\beta y + \alpha x + x^2 + y^2) = a^2xy.$$

— Les tangentes en ($\alpha.\beta$) sont

$$(\beta x + \alpha y)(\beta y + \alpha x) - a^2xy = 0,$$

ou

$$\alpha\beta y^2 + xy(\beta^2 + \alpha_2 - a^2) + \alpha\beta x^2 = 0.$$

Elles ont pour coefficients angulaires :

$$t = \frac{a^2 - \beta^2 - \alpha^2 \pm \sqrt{(a^2 - \beta^2 - a^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2}}{2\alpha\beta}.$$

Elles seront réelles si

$$(a^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \geq 0,$$

ou $(a^2 - \beta^2 - \alpha^2 + 2a\beta)(a^2 - \beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta) \geq 0$,

ou $(a - \alpha + \beta)(a + \alpha - \beta)(a - \beta - \alpha)(a + \beta + \alpha) \geq 0. \quad (5)$

Construction de la courbe. — *Supposons le point double réel*, c'est-à-dire la condition (5) remplie.

Remarquons que les quatre facteurs qui y entrent représentent les quatre côtés du carré. D'après cela, on voit que le point double ne pourra être réel que si P est situé soit dans l'intérieur du carré, soit dans l'un des quatre angles opposés par le sommet : ce que l'on voit d'après les signes des régions formées par les droites AB, BC, CD, DA.

— On pourrait voir *a priori* que si P n'était pas dans ces régions, le point double serait imaginaire.

— *Quand le point double est réel*, les coefficients angulaires des tangentes en ce point sont de même signe ; de plus, ils sont réciproques.

— *Supposons le point* P *situé dans un angle opposé à un sommet du carré.* Nous pouvons toujours prendre α et $\beta > 0$; Dans ce cas, $a^2 - \beta^2 - \alpha^2$ sera négatif, par suite les deux valeurs de t seront négatives. — Construisons les courbes qui entrent en facteur dans l'équation du lieu, et séparons

le plan en régions. On voit immédiatement, d'après les signes, que dans les régions ombrées il n'y a pas de points.

— On voit aussi, d'après l'énoncé, qu'il n'y a pas de points du lieu entre deux côtés parallèles du carré, extérieurement aux deux autres.

Asymptotes. — Les asymptotes sont parallèles aux axes, car l'on a pour l'ensemble des termes du degré le plus élevé
$$2xy\,(x^2 + y^2).$$

La courbe passe aux points cycliques, et admet les axes pour directions asymptotiques réelles. — Les asymptotes sont
$$x = \frac{\alpha}{2};\quad y = \frac{\beta}{2}$$
(ce sont les mêmes que celles de l'hyperbole équilatère
$$\beta x + \alpha y - 2xy = 0,$$
qui entre dans la séparation en régions).

L'asymptote $y = \frac{\beta}{2}$ coupe la courbe en deux points : à distance finie, évidemment en E; en un autre point F, à distance finie ou infinie.

— Dans le deuxième cas, nous aurons un *point d'inflexion à l'infini*. Si dans l'équation de la courbe on fait $x = \frac{\alpha}{2}$, il vient
$$\beta\left(\frac{a\alpha}{2} + \beta y - \frac{\alpha^2}{4} - 2y^2\right) = a^2(\beta - y);$$
donc $\beta = 0$ est la condition nécessaire du point d'inflexion à l'infini.

Cette condition n'a pas lieu dans la figure : le point F sera positif, ainsi que le montre la séparation en régions.

— L'autre asymptote est aussi coupée en deux points.

La courbe passe aux quatre sommets du carré, et par les projections de $(\alpha.\ \beta)$ sur les axes et sur les côtés du carré : car on peut toujours assujettir une conique à être tangente à quatre droites, en un point de l'une d'elles. D'après la séparation en régions, il est évident que la courbe est tangente aux côtés du carré.

Nous aurons la figure (1).

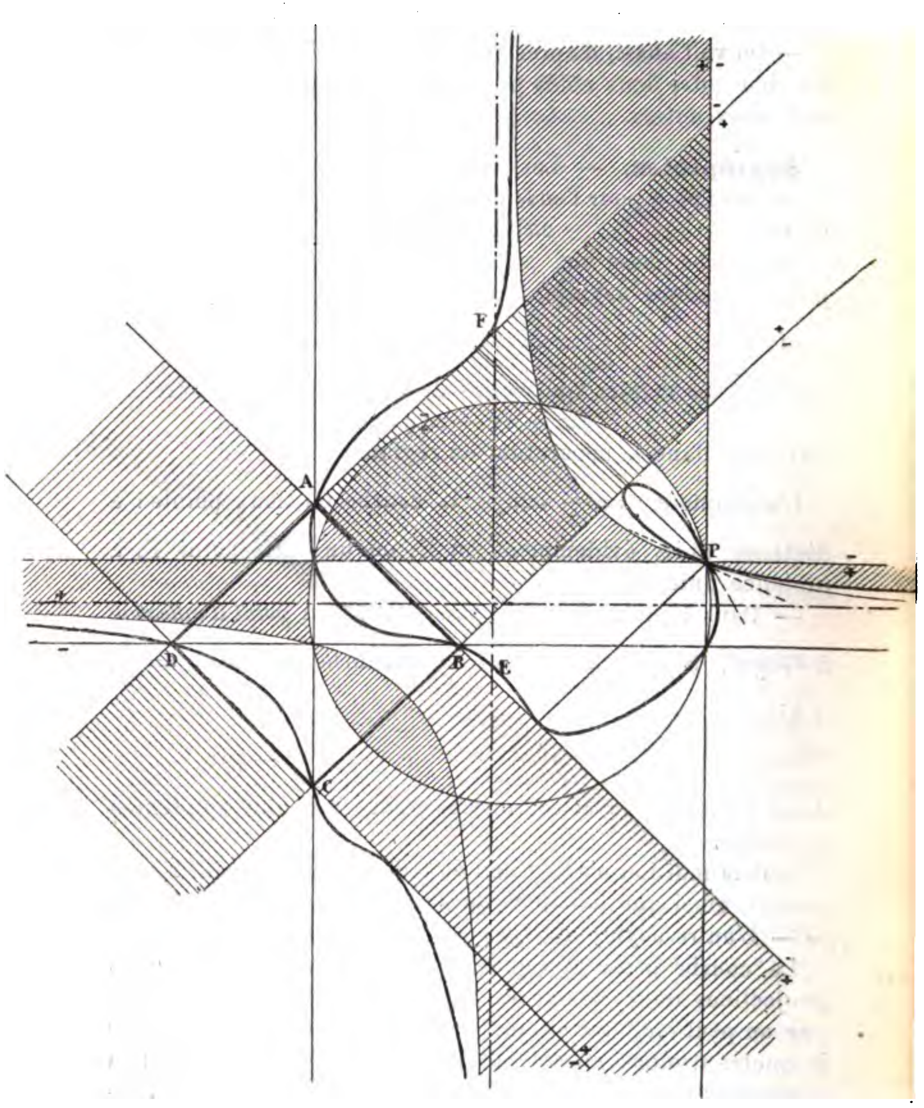


Fig. 1.

2° Supposons le point P dans le carré.

Dans ce cas, $a^2 - \beta^2 - \alpha^2$ est positif; les deux coefficients angulaires des tangentes à l'origine sont positifs, et on a

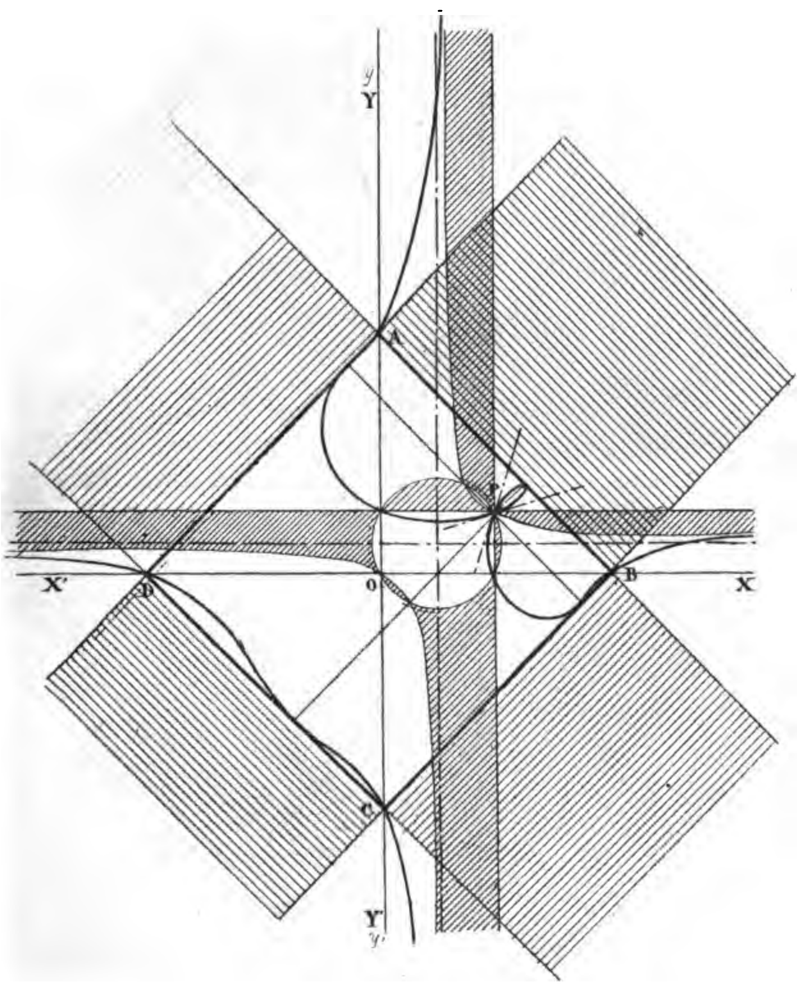


Fig. 2.

la figure (2). On vérifie comme précédemment la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

3° Supposons le point P sur CB, dans l'angle opposé à B. Les deux tangentes au point double sont confondues : on a un point de rebroussement. La tangente double est parallèle

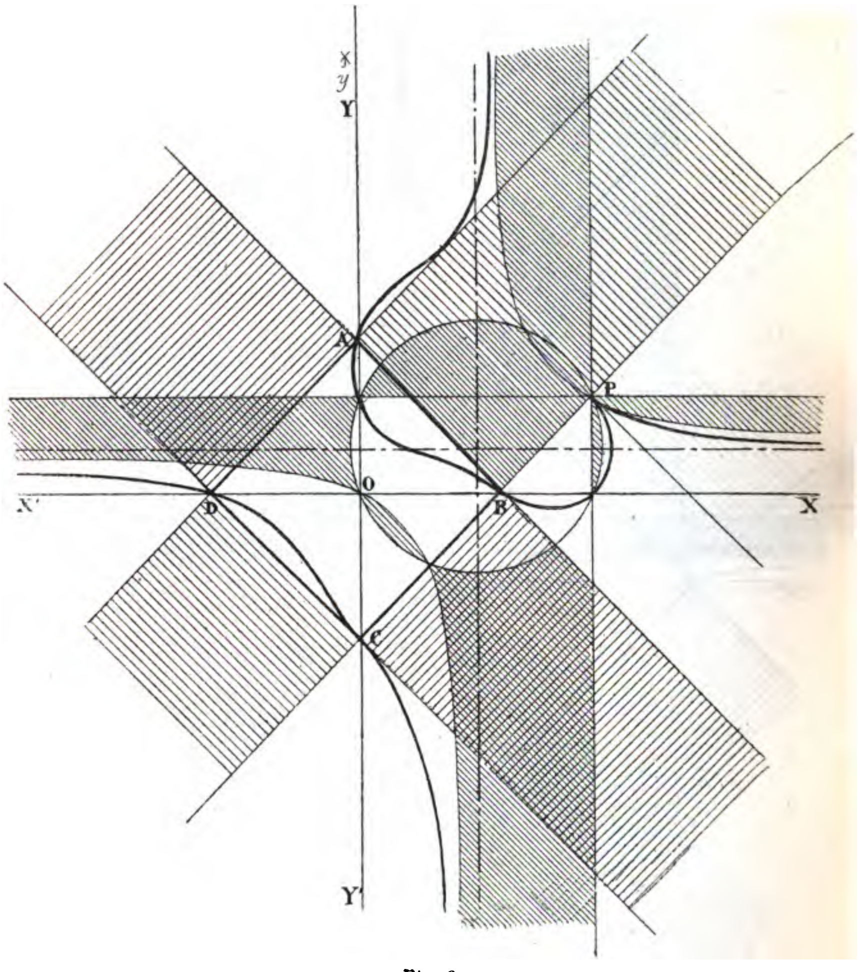


Fig. 3.

à la bissectrice de X'OY', et on a la figure (3). C et D sont des points d'inflexion.

Les tangentes sont DC et AB.

4° Si le point P est sur AB, entre A et B, on a la figure (4). On voit immédiatement que les droites AD et BC sont devenues tangentes d'inflexion en A et B.

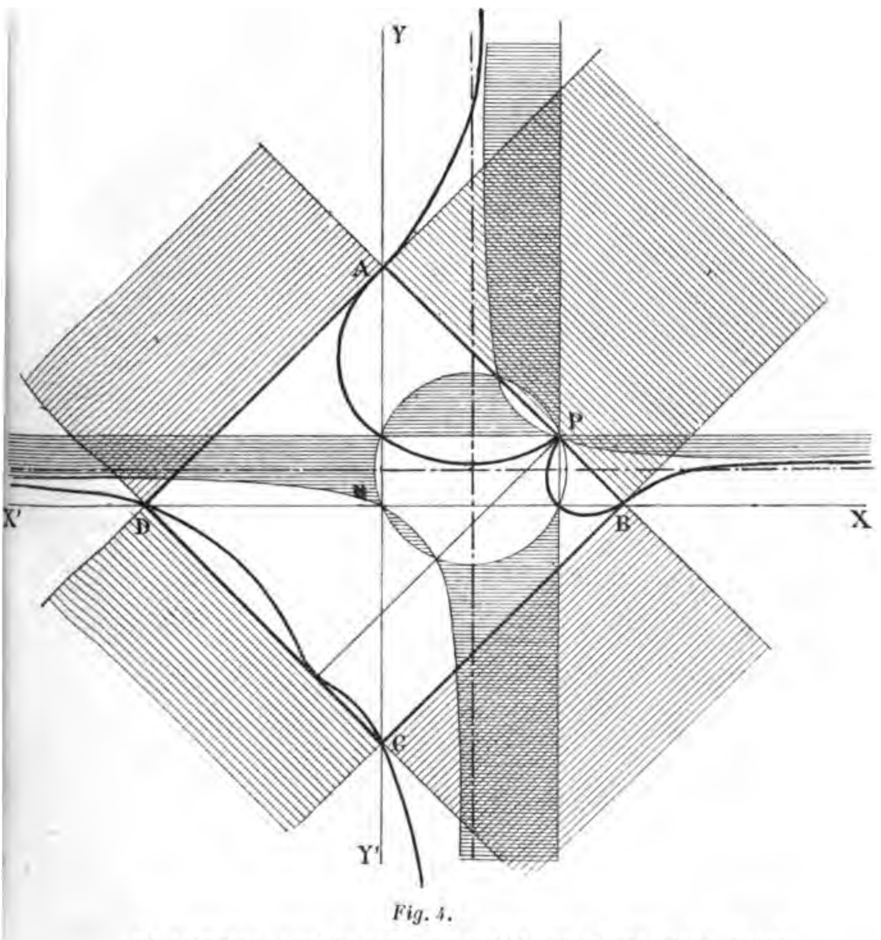


Fig. 4.

— Si le point double n'est pas réel, si P est situé entre DA et CB, on aura la figure (5).

— Lorsque le point P est sur l'un des axes, sur OX par exemple, la courbe devient

$$y = 0 \text{ et } (\alpha - 2x)(\alpha x - x^2 - y^2) + a^2 (\alpha - x) = 0,$$

courbe du troisième degré, symétrique par rapport à OX, qui a pour asymptote $x = \frac{\alpha}{2}$. Elle présente un point d'inflexion

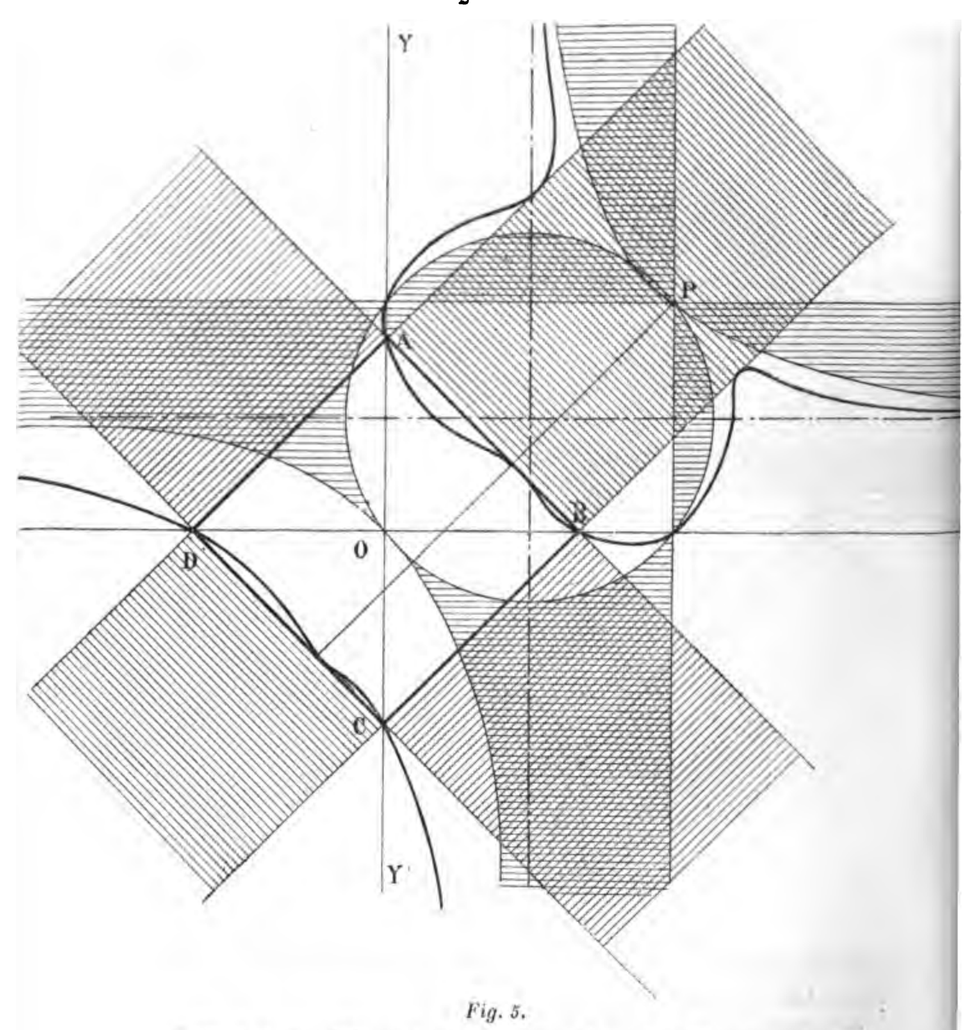


Fig. 5.

à l'infini, car l'équation qui donne le point d'intersection des deux asymptotes est $a^2 \frac{\alpha}{2} = 0$.

1° Lorsque P est en dehors du carré, on a deux points sur OX, qui sont donnés par

$$(\alpha - 2x)(\alpha x - x^2) - a^2(x - \alpha) = 0;$$

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + a^2};$$

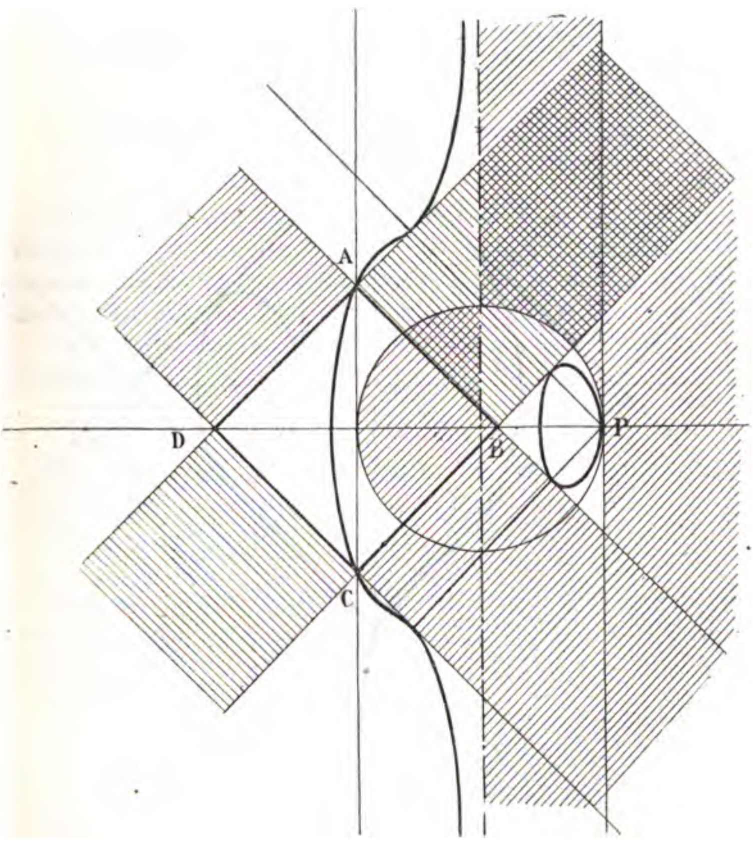


Fig. 6.

on a toujours trois points sur OX, deux symétriques par rapport aux asymptotes, figure (6).

2° Lorsque P est intérieur au carré, figure (7).

3° Lorsque $\alpha = 0$, $\beta = 0$, la courbe se réduit à deux droites et à un cercle inscrit dans le carré.

— Il est très simple de séparer les points du lieu qui proviennent des ellipses de ceux provenant des hyperboles. Les points à l'intérieur du carré appartiennent seuls aux ellipses;

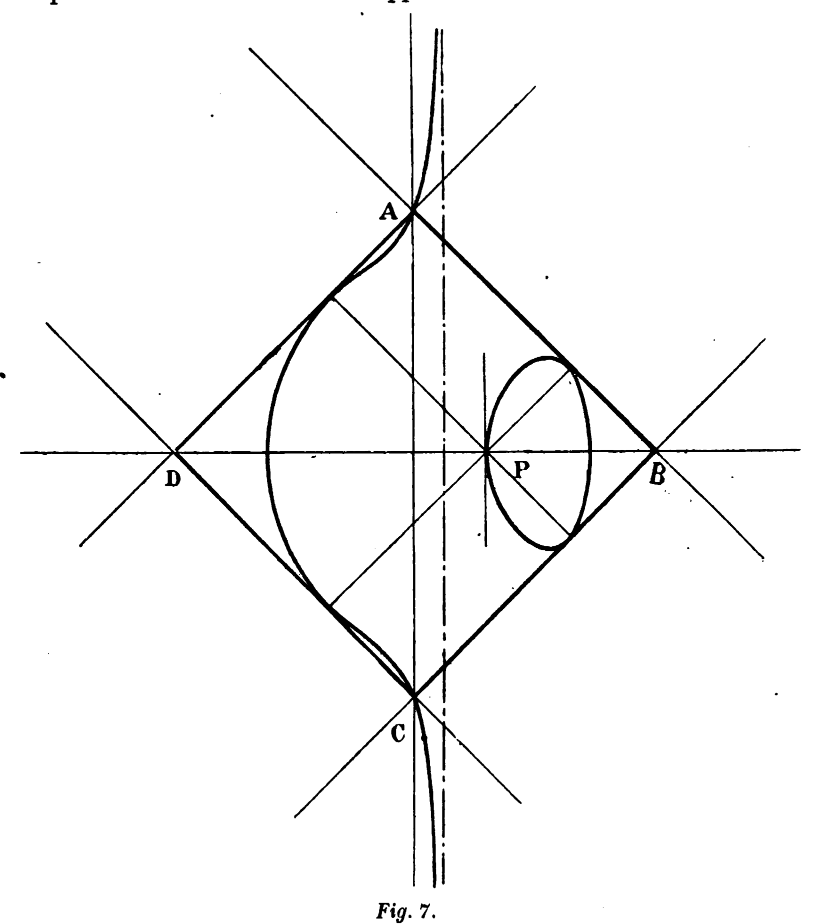


Fig. 7.

ceux à l'extérieur, aux hyperboles: car il ne peut y avoir aucune ellipse extérieure au carré, et aucune hyperbole pénétrant dans le carré; ces courbes couperaient leurs tangentes.

— On peut aussi le voir analytiquement. Il suffit de cher-

cher les points du lieu pour lesquels le produit A^2B^2 est positif ou négatif :

$$A^2B^2 = \frac{a^4xy(\alpha - x)(\beta - y)}{(\beta x + \alpha y - 2xy)^2}.$$

En construisant les droites $x = \alpha$, $y = \beta$, on constatera le même résultat.

QUESTION 356

Solution par M. H. Dupuy, élève du Lycée de Grenoble.

Étant donnée une conique, on considère les cercles qui sont tangents à cette conique, et tels que les tangentes communes aux cercles et à la conique soient parallèles. Trouver le lieu des centres de ces cercles.

On sait que l'équation des tangentes menées de $(x_0\, y_0)$ à l'ellipse est

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2}\right) = \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2$$

Si $(x_0\, y_0)$ s'éloigne à l'infini dans la direction t, on a l'équation des tangentes parallèles

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) = \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right)^2.$$

Or le cercle considéré est tangent à ces droites, suivant une corde qui leur est perpendiculaire ; soit $ty + x + ts = 0$ l'équation de ce diamètre de contact.

Le cercle aura donc pour équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right)^2 + \lambda\,(ty + x + ts)^2 = 0. \qquad (1)$$

On trouve que $\lambda = \frac{1}{a^2\, b^2}$ est une condition suffisante pour que (1) représente un cercle. Cette même équation montre que le cercle et l'ellipse admettent pour droites d'intersection les droites

$$\left(\frac{x}{a^2} + \frac{ty}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2\, b^2}\,(ty + x + ts)^2$$

Exprimons que l'une d'elles $\frac{x}{at}+\frac{y}{b}+\frac{8}{a+b}=0$ est tangente en un point x_1y_1 de l'ellipse ; et identifions son équation avec celle de la tangente $x\frac{x_1}{a^2}+y.\frac{y_1}{b^2}-1=0$. On en déduit facilement les deux relations

$$x_1=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\qquad y_1=\frac{bt}{\sqrt{1+x^2}}$$

qui sont les points de contact du cercle et de l'ellipse. Or remarquons que le centre du cercle est sur la droite $y=tx$ et sur la normale à l'ellipse en (x_1y_1), normale qui a pour équation $a[X\sqrt{1+t^2}-a]=\frac{b}{t}(Y\sqrt{1+t^2}-bt)$; éliminant t, on trouve pour lieu du centre $X^2+Y^2=(a+b)^2$. Ce cercle est imaginaire dans les cordes de l'hyperbole, et s'éloigne à l'infini pour la parabole.

— Si on pose $t=\text{tg}\theta$, on voit que $x_1=a\cos\theta$, $y_1=b\sin\theta$ et que les coordonnées du centre du cercle correspondant sont $x=(a+b)\cos\theta$, $y=(a+b)\sin\theta$, et le rayon du cercle est donné par la formule $R^2=b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta$.

Ainsi, les éléments d'un des cercles considérés sont obtenus en fonction du paramètre angulaire du point de contact $(x_1\,y_1)$.

CORRESPONDANCE

SUR LES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN

Par M. J. Bourget.

(Voir la page 82 du Journal.)

La formule du reste, donnée par M. Parpaite, est identique à celle que j'ai donnée moi-même, il y a treize ans, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (ann. 1870, p. 537). La démonstration de M. Parpaite ne diffère pas non plus de la mienne.

En nommant F (x) la fonction à développer et φ (x) une fonction continue arbitraire assujettie seulement à la condition $\varphi(o) = o$, j'ai trouvé

1° Pour le reste de la série de Maclaurin:

$$R = \frac{\varphi(x)}{\varphi'[(1-\theta)x]} \frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^n(\theta x);$$

2° Pour le reste de la série de Taylor:

$$R = \frac{\varphi(h)}{\varphi'[(1-\theta h]} \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^n(x+\theta h),$$

J'ajoutais que si l'on fait en particulier $\varphi(x) = x^p$, on retombe sur le reste trouvé par Schlomilch et par Roche.

QUESTIONS PROPOSÉES

59. — Lieu des centres des coniques, de surface donnée, circonscrites à un triangle. Examiner spécialement le cas des hyperboles. Étudier, dans ce cas, les branches infinies et les sinuosités de la courbe. *(Amigues.)*

60. — On donne une famille de coniques représentée par l'équation

$$x^2(1+\lambda) - 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 - 2x = o;$$

par chaque point A, réel, du plan, passent deux coniques de la famille. Dans quelles régions doit être le point A pour que ces coniques aient une équation: 1° à coefficients imaginaires; 2° à coefficients réels. Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres suivant que par le point A il passe deux ellipses, ou deux hyperboles, ou une ellipse et une hyperbole. — Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.

(Amigues.)

61. — On considère une ellipse rapportée à ses axes AA', BB'. D'un point C, pris sur l'axe Oy, avec CA = CA' pour rayon, on décrit un cercle Δ, A et A' désignant les extrémités du grand axe.

1. — Soit M. un point mobile sur Δ ; par ce point M on mène à l'ellipse des tangentes. La droite qui joint les points de contact rencontre Δ en deux points P et Q, et les tangentes en P et Q à Δ se rencontrent en un point I, dont on demande le lieu géométrique quand M parcourt la circonférence.

2. — Ce lieu est une conique U, dont on demande de déterminer le genre d'après la position de C sur Oy.

3. — Construire cette conique en supposant $a^2 = 3b^2$, et en admettant que C coïncide avec B.

4. — La tangente en A au cercle rencontre U en deux points P′ et Q′. Trouver le lieu de P′ et celui de Q′ quand C décrit Oy.

5. — De l'origine on abaisse une perpendiculaire OP″ sur CP′, et une autre OQ″ sur CQ′. Trouver le lieu de P″ et celui de Q″.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9164-3.

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

Nous avons donné, dans ce journal, à un moment où il ne traitait que des questions de mathématiques élémentaires, un premier article sur l'Involution ; depuis cette époque, le journal s'est transformé, et nous nous proposons de reprendre la question, et de l'étudier sans nous préoccuper de la distinction, ici factice, entre les mathématiques élémentaires et les mathématiques spéciales; l'exposition de la théorie ne sera pas moins simple ; mais les applications seront plus nombreuses, plus variées, et par suite plus utiles à tous nos lecteurs.

Soit $ax^2 + 2bx + c = 0$ l'équation qui détermine sur une droite fixe, à partir d'une origine fixe O, les abscisses α et β, réelles ou imaginaires, finies ou infinies, égales ou inégales, d'un couple de points A et B;

Soit ensuite $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ l'équation qui détermine sur la même droite, à partir de la même origine, les abscisses α' et β', d'un autre couple de points A' et B';

L'équation

$$(\lambda)\quad ax^2 + 2bx + c + \lambda(a'x^2 + 2b'x + c') = 0,$$

représente sur la même droite un couple, P et Q, variable avec λ; et nous nous proposons d'étudier les propriétés de ce couple mobile, dont nous désignerons les abscisses par u et v; nous avons les relations;

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{2(b + \lambda b')}{a + \lambda a'} \\ uv = \dfrac{c + \lambda c'}{a + \lambda a'}. \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} a(u + v) + 2b + \lambda[a'(u + v) + 2b'] = 0 \\ a.uv - c + \lambda[a'.uv - c'] = 0; \end{cases}$$

d'où nous concluons, en éliminant λ, la relation

$$0 = \begin{vmatrix} a(u + v) + 2b, & a'(u + v) + 2b' \\ a.uv - c, & a'.uv - c' \end{vmatrix}$$

ou bien

$$2(ab' - ba')uv + (ac' - ca')(u + v) + 2(bc' - cb') = 0;$$

donc il existe entre les abscisses des deux extrémités P *et* Q *du segment, mobile avec* λ, *une relation de la forme*

$$[u,v]\cdots\ 2g\,.\,uv + h(u + v) + 2k = 0.$$

c'est-à-dire une relation qui est à la fois homographique et symétrique.

Remarque. — La relation précédente n'est pas en général une identité, et ne pourrait le devenir accidentellement que si l'on avait les relations particulières

$$ab' - ba' = 0,\ bc' - cb' = 0,\ ac' - ca' = 0,$$

c'est-à-dire que si les deux couples primitifs, A et B, A' et B', coïncidaient complètement l'un avec l'autre.

Cela posé, je vais démontrer réciproquement que si un couple variable (P, Q) se déplace sur une droite d'après une relation donnée

$$2G.uv + H(u + v) + K = 0, \qquad (1)$$

on peut reproduire tous les couples mobiles à l'aide d'une seule équation du second degré qui contienne un paramètre variable et qui soit de la forme (λ).

En effet uv et $u + v$ étant liés par une seule relation linéaire (1), nous pouvons nous donner à volonté l'une de ces deux quantités; posons par exemple

$$uv = \frac{r + \lambda r'}{p + \lambda p'}\ (*).$$

Nous en concluons sans peine

$$u + v = -\frac{2(q + \lambda q')}{p + \lambda p'}$$

ou $$q = \frac{G.r + K.p}{H},\ q' = \frac{Gr' + Kp'}{H};$$

donc u et v sont les racines de l'équation

$$px^2 + 2qx + r + \lambda(p'x^2 + 2q'x + r') = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

(*) On sait que l'expression rationnelle $\frac{r + \lambda r'}{p + p\lambda'}$ parcourt, dans un seul sens de variation, toute l'échelle des grandeurs tant positives que négatives, quand de $-\infty$ à $+\infty$.

REMARQUE. — La démonstration précédente semble d'abord en défaut par les valeurs de q et de q', quand H est nul; mais il suffit, pour combler cette lacune apparente, de remarquer que si H est nul, ce n'est pas uv qui doit être pris à volonté, mais $u + v$, et alors la démonstration se continue de la même manière; cette observation est d'autant plus importante que le cas particulier ainsi signalé peut, comme nous le verrons bientôt, être regardé comme étant le cas général.

Cela posé, nous adoptons la définition suivante:

Quand un segment (P, Q), *mobile sur une droite fixe, se déplace par la condition que les abscisses de ses extrémités soient les racines de l'équation*

$$(\lambda) \quad ax^2 + 2bx + c + \lambda (a'x^2 + 2b'x + c') = 0,$$

les positions successives de ce segment forment ce que l'on nomme une involution du second ordre sur la droite fixe.

Il en résulte que les abscisses, u et v, du segment mobile sont liées par la relation

$$2g\,.uv + h\,(u + v) + 2k = 0$$

ou :

$$g = ab' - ba',$$
$$h = ac' - ca',$$
$$k = bc' - cb'.$$

Nous avons donc deux définitions algébriques différentes de forme pour caractériser une seule et même involution; et nous sommes, dès ce moment, autorisés à user tantôt de l'une, tantôt de l'autre, soit pour reconnaître la nature *involutive* d'un segment mobile sur une droite, soit pour étudier les propriétés d'une involution donnée.

Théorème. — *Une involution est déterminée et unique, quand on connaît deux segments en grandeur et en position.*

En effet pour déterminer une involution, il faut et il suffit que l'on connaisse les valeurs proportionnelles des coefficients g, h, k; or en posant

$$u_1v_1 = P_1 \qquad u_1 + v_1 = S_1$$
$$u_2v_2 = P_2 \qquad u_2 + v_2 = S_2$$

P_1, P_2, S_1, S_2, sont les données; on a donc

$$2g\,.\,uv + h(u+v) + 2k = 0,$$
$$2g\,.\,P_1 + h\,.\,S_1 + 2k = 0,$$
$$2g\,.\,P_2 + h\,.\,S_2 + 2k = 0;$$

éliminant g, h, k entre ces trois équations homogènes, on aura la relation d'involution, qui est donc

$$\begin{vmatrix} uv & u+v & 1 \\ P_1 & S_1 & 1 \\ P_2 & S_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(S_1 - S_2)uv - (P_1 - P_2)\,.\,(u+v) + P_1\,.\,S_2 - P_2\,.\,S_1 = 0,$$

et il en résulte que tous les couples de l'involution seront produits par l'équation

$$x^2 - S_1\,.\,x + P_1 + \lambda(x^2 - S_2x + P_2) = 0,$$

ce qui résulterait d'ailleurs immédiatement de la première définition de l'involution.

La relation

$$(S_1 - S_2)uv - (P_1 - P_2)\,.\,(u+v) + P_1S_2 - P_2\,.\,S_1 + 0$$

met en évidence un fait important : le coefficient $S_1 - S_2$ ne peut être nul que par exception ; pour cela il suffit que les deux segments donnés aient le même milieu, c'est-à-dire soient déterminés sur la droite par deux circonférences ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à la droite fixe, et alors tous les segments auront le même milieu, puisque la relation deviendra

$$u + v = S_1.$$

Mais n'oublions pas que cette involution composée, sans exception, d'une suite de segments, réels ou imaginaires, ou nuls, qui ont tous le même milieu, est une involution en quelque sorte exceptionnelle.

La même relation va mettre en évidence une propriété commune à toutes les involutions.

Supposons que sans changer les deux segments, réels ou imaginaires, qui déterminent l'involution, on fasse mouvoir sur la droite fixe le point O qui sert d'origine commune à toutes les abscisses ; si cette origine avance d'une quantité indéterminée z, les sommes données deviendront

$$u_1 - z + v_1 - z = S_1 - 2z$$

et

$$u_2 - z + v_2 - z = S_2 - 2z$$

et les produits donnés deviendront

l'un : $(u_1 - z)(v_1 - z) = P_1 - z \cdot S_1 + z^2$;

l'autre : $(u_2 - z)(v_2 - z) = P_2 - z \cdot S_2 + z^2$;

donc si l'on détermine z par la condition

$$P_1 - z \cdot S_1 + z^2 = P_2 - z \cdot S_2 + z^2,$$

on trouvera

$$z = \frac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2};$$

donc : *pour toute involution, il existe, sur la droite fixe, un point, et un seul, qui pris comme origine réduit la relation fondamentale à la forme simple*

$$ux = \text{constante}.$$

Ce point qui ne se transporterait à l'infini que pour l'involution exceptionnelle dont tous les segments ont le même milieu, *se nomme le centre de l'involution*; la valeur de z qui précède détermine exactement la position de ce centre.

Théorème. — *Dans toute involution il y a deux segments qui ont chacun une longueur nulle.*

En effet, en supposant que l'involution soit définie par la relation

$$2g.uv + h(u + v) + 2k = 0,$$

un segment deviendra nul quand on aura

$$u = v;$$

donc l'équation du problème est

$$2g \cdot \delta^2 + 2h \cdot \delta + 2k = 0, \qquad (\delta)$$

Cette équation du second degré aura généralement deux racines distinctes, réelles ou imaginaires ; chacune de ces racines sera une valeur de u telle que $v = u$; le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Si $h = 0$, c'est-à-dire, si on a eu le soin de mettre l'origine au centre de l'involution, les deux racines de l'équation (δ) seront égales et de signes contraires ; donc : *les deux points qui forment chacun un segment nul, et qu'on nomme les* POINTS DOUBLES *de l'involution, sont symétriques l'un de l'autre relativement au centre de l'involution.*

Remarque II. — Pour déterminer les points doubles, on pourrait aussi se servir de l'équation (λ) et exprimer qu'elle

a ses deux racines égales, ce qui donne la condition

$$(a + \lambda a')(c + \lambda c') - (b + \lambda b')^2 = 0$$

ou bien

$$(a'c' - b'^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Remarque III. — La réalité des deux points doubles d'une involution est caractérisée par l'une quelconque des inégalités :

$$4(ab' - ba')(bc' - cb') - (ac' - ca')^2 < 0$$

ou $$4(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - (ac' + ca' - 2bb')^2 < 0.$$

L'imaginarité des deux points doubles est caractérisée par une quelconque des inégalités contraires.

On reconnaîtra sans peine, et par un calcul simple, que l'une quelconque des inégalités exprimant la réalité des deux points doubles peut s'écrire

$$R = -a^2a'^2(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta') \,.\, (\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0.$$

Remarque IV. — Il résulte de cette dernière transformation que les deux points doubles d'une involution sont généralement distincts l'un de l'autre, et ne peuvent se réunir en un seul que si les deux segments AB, A'B', qui déterminent l'involution, ont une extrémité commune.

(A suivre.)

QUESTION 359

Solution par M. P. Petit, élève au lycée de Grenoble.

Trouver la condition pour que les deux polynômes

$$ax^7 + bx^3 + c,$$
$$cx^7 + bx^4 + a,$$

aient un facteur commun du deuxième degré.

Soit $f(x)$ le premier polynôme. Je remarque que le second polynôme est la transformée en $\frac{1}{x}$ de $f(x)$. Si ces deux polynômes ont un facteur commun du deuxième degré, il faudra que $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ aient deux racines communes. Or ces racines ne peuvent être que ± 1. Il faudra donc que l'équa-

tion $f(x) = 0$ admette les deux racines ± 1, c'est-à-dire :

$$a + b + c = 0$$
$$-(a + b) + c = 0$$

c'est-à-dire enfin :

$$c = 0$$
$$a + b = 0.$$

QUESTION 386

Solution, par M. Charles JULLIEN, élève au Lycée Henri IV.

Trouver le nombre de manières dont on peut distribuer p *objets distincts entre* q *personnes, de telle sorte que chacune d'elles ait un objet au moins.*

Désignons par N_p^q le nombre cherché. Proposons-nous d'abord de trouver le nombre N_q^q. Chacune des personnes devant avoir un objet au moins, le nombre de manières de distribuer p objets entre q personnes est évidemment égal au nombre de permutations de q lettres ou à P_q.

Cherchons maintenant une relation entre le nombre N_{q+n-1}^q et le nombre N_{q+n}^q.

Supposons les $(q + n - 1)$ premiers objets distribués d'une des N_{q+n-1}^q manières possibles, il faut donner de plus un objet à l'une quelconque des personnes ; il y a q manières de le faire ; donc on a en tout qN_{q+n-1}^q manières de distribuer les $(q + n)$ objets. Appliquant le raisonnement ordinaire, on montrerait que toutes ces manières sont distinctes, et que toutes les manières possibles ont été employées.

On a alors la relation

$$qN_{q+n-1}^q = N_{q+n}^q.$$

Faisant n égal successivement à $1, 2, \ldots, n$, on a

$$N_{q+1}^q = q\, N_q^q = qP_q$$
$$N_{q+2}^q = qN_{q+1}^q$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{q+n}^q = qN_{q+n-1}^q.$$

Faisant le produit membre à membre de ces égalités, il vient

$$N_{q+n}^q = q^n Pq.$$

Faisons dans cette formule $n = p - q$, nous aurons

$$N_p^q = q^{p-q}P_q,$$

c'est-à-dire la formule cherchée.

QUESTION 388

Solution par M. PAUL BOULOGNE, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint Louis (cours de M. ÉDOUARD LUCAS).

Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données ox *et* oy. *Soit* M *le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse. Soit* μ *le centre de ce cercle: 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de* M *est l'enveloppe d'une droite de longeur constante qui glisse sur l s deux droites* ox, oy; *et le lieu de* μ *est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.* (E. Lemoine).

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$
l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes;
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - ab = 0 \qquad (2)$$
celle d'un cercle de même surface que l'ellipse. Pour écrire que les deux courbes sont osculatrices, écrivons que l'équation en λ
$$\lambda^3 + \lambda^2 [a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - ab)]$$
$$+ \lambda [a^2b^2 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - ab) + b^2\beta^2 + a^2\alpha^2] + a^3b^3 = 0$$
a une racine triple et remarquons que cette racine triple sera $-ab$:
$$[a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - ab)]^3 = 27\, a^3b^3$$
$$[a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2\ ab)$$
$$[a^2b^2 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - ab) + b^2\beta^2 + a^2\alpha^2] = 9\, a^3b^3.$$
La première équation nous donne
$$\alpha^2 + \beta^2 = (a - b)^2, \qquad (3)$$

qui exprime que la distance du centre du cercle osculateur de même surface que l'ellipse au centre de l'ellipse est $a - b$. En se servant de la première équation pour modifier la seconde, on ramène celle-ci à la forme simple

$$a\beta^2 - b\alpha^2 = 0. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4), où α et β sont considérés comme variables, représentent un cercle et deux droites dont les points d'intersection sont les centres. Le point M est donné par l'intersection des deux droites dont l'équation quadratique est

$$x^2\left(\frac{a-b}{a}\right) + y^2\left(\frac{b-a}{a}\right) - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

qui est donnée en remplaçant λ par $-ab$ dans l'équation générale des coniques passant par l'intersection de (1) et de (2), ou en dérivant

$$\frac{x(a-b)}{a} = \alpha, \tag{5}$$

$$\frac{y(b-a)}{b} = \beta. \tag{6}$$

Pour avoir le lieu de M, quand la somme des axes reste constante, il faut éliminer α, β, a et b entre (3), (4), (5), (6) et

$$a + b = l.$$

L'élimination de β et de α se fait immédiatement, et on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{7}$$

$$a\,\frac{y^2}{b^2} = b\,.\,\frac{x^2}{a^2}. \tag{8}$$

Tirant $\frac{y^2}{b^2}$ de (7) et portant dans (8) on trouve

$$a^3 = lx^2.$$

De même $$b^3 = ly^2.$$

Le lieu de M est donc

$$(x^2)^{\frac{1}{3}} + (y^2)^{\frac{1}{3}} = (l^2)^{\frac{1}{3}},$$

épicycloïde à quatre rebroussements et symétrique par rapport à l'origine. C'est l'enveloppe d'une droite de longueur l glissant sur ox et oy.



Pour avoir le lieu de p, il suffit d'éliminer a et b entre (3), (4) et
$$a + b = l.$$
Tirant a et b de (4) et de cette dernière et portant dans (3), on obtient
$$(x^2 + y^2)^3 = l^2 (x^2 - y^2)^2.$$
C'est la rosace à quatre branches dont parle l'énoncé.

En effet, si on élimine θ et ρ entre
$$\frac{y\sqrt{2} + \theta}{x\sqrt{2} - \theta} = \frac{\rho + \theta}{\rho - \theta}, \qquad (9)$$
équation d'une droite glissant sur les bissectrices des axes,
$$y = \frac{\theta - \rho}{\theta + \rho}\, x, \qquad (10)$$
perpendiculaire abaissée de l'origine, et $\theta^2 + \rho^2 = \sigma^2$, qui exprime que la longueur de la droite est constante, on trouve pour lieu du pied de (10) sur (9)
$$(x^2 + y^2)^3 = \frac{\sigma^2}{4} (x^2 - y^2)^2,$$
et la droite de longueur constante dont parle l'énoncé pour le lieu de p est double de la somme des axes.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, de Grenoble; Baron, à Paris.

QUESTION 396

Étant donnée une conique autour d'un point fixe P *de son plan, on fait tourner une sécante* PDD′ *et on joint un foyer* F *aux points* D *et* D′ *où cette droite rencontre la courbe. Démontrer que l'on a* $\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{PFD}}{2} \times \mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{PFD'}}{2} = \mathrm{const.}$

Ce problème se traite facilement au moyen des coordonnées trilatères.

Je prends pour triangle de référence le triangle rectangle ayant pour sommet de l'angle droit le foyer F, pour hypoténuse la directrice AB et comme un des côtés de l'angle droit la droite FP.

L'équation de la conique donnée est alors

$$X^2 + Y^2 = e^2Z^2,$$

e étant l'excentricité.

L'équation de toute sécante dont les paramètres angulaires des points d'intersection avec la conique sont φ_1 et φ_2 est

$$X \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + Y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = eZ \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

J'exprime que cette sécante passe par le point fixe P dont les coordonnées sont X_0, O, Z_0:

$$X_0 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = eZ_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

ou bien

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = K$$

ou encore

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}} = K.$$

Je divise le numérateur et le dénominateur par

$$\cos \frac{\varphi_1}{2} \times \cos \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{3}} = K.$$

D'où

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - K}{1 + K}.$$

Or φ_1 et φ_2 sont les angles PFD, PFD'. Donc l'on a bien

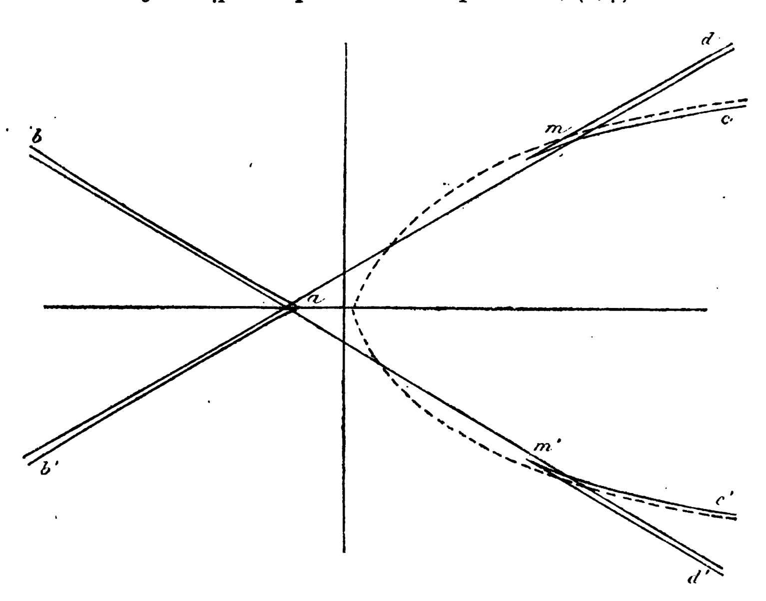
$$\operatorname{tg} \frac{\text{PFD}}{2} \times \operatorname{tg} \frac{\text{PFD}'}{2} = \text{constant}.$$

QUESTION 3

Solution par M. Kœhler.

Mener par un point donné une droite telle que le segment intercepté par une parabole donnée soit maximum ou minimum. Le problème admet trois solutions. Trouver le lieu des points du plan pour lesquels deux des solutions se confondent : ce lieu, du quatrième degré, partage le plan en deux régions; discuter le problème lorsque le point donné est dans l'une ou l'autre de ces régions.

Soient $y^2 = 4px$ l'équation de la parabole, (α, β) les coor-



données d'un point de son plan, m le coefficient angulaire d'une corde menée par ce point.

Les ordonnées de l'extrémité de la corde sont racines de l'équation $$my^2 - 4py + 4p(\beta - m\alpha) = 0.$$

Le carré de la longueur de la corde est

$$C^2 = \frac{16p}{m^4}(p - m\beta + m^2\alpha)(1 + m^2).$$

On a donc à rendre maximum ou minimum la fonction

$$f(m) = \frac{1}{m^4}(p - m\beta + m^2\alpha)(1 + m^2),$$

ce qui donne

$$f'(m) = \frac{1}{m^5}(\beta m^3 - 2m^2(p + \alpha) + 3\beta m - 4p) = 0.$$

Pour un point donné (α, β), on a trois valeurs de m; si l'on cherche la condition pour que $f'(m) = 0$ ait deux racines égales, on trouve

$$9y^2(x - 5p)^2 + [9y^2 - 4(x + p)^2][9y^2 - 24p(x + p)] = 0$$

ou $27y^4 - 9y^2(x^2 + 14px + p^2) + 32p(x + p)^3 = F(x,y) = 0$ après avoir remplacé α, β par x, y.

Cette courbe partage le plan en deux régions, celle pour laquelle on a une seule corde réelle satisfaisant à la condition $f'(m) = 0$, et celle pour laquelle on en a trois.

La première région est caractérisée par $F(x,y) > 0$, la seconde par $F(x,y) < 0$.

Étude de la courbe. — Pour $y = 0$, $x = -p$, on a un point de rebroussement avec l'axe des x pour tangente.

Pour $x = 5p$, $y = \pm 4p$, les deux points ainsi obtenus sont encore des points de rebroussement; les tangentes sont $y - 4p = \frac{1}{2}(x - 5p)$, $y + 4p = -\frac{1}{2}(x - 5p)$.

Il y a deux asymptotes réelles

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5p\sqrt{3}}{9}$$

et

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{5p\sqrt{3}}{9}.$$

En résolvant par rapport à y^2, on trouve

$$54y^2 = 9(x^2 + 14x + p^2) \pm \sqrt{27(3x^4 - 44px^3 + 210p^2x^2 - 300p^3x - 125p^4)}.$$

La racine du polynôme $9x^4 - 132px^3 + \ldots$ est

$$3x^2 - 22px + \frac{73}{3}p^2 \text{ (avec un reste).}$$

D'après cela les courbes

$$54y^2 = 9(x^2 + 14x + p^2) \pm 3(3x^2 - 22px + \frac{73}{3}p^2)$$

sont des coniques asymptotes. Celle qui répond au signe + est une hyperbole ayant les mêmes asymptotes que la courbe du quatrième degré; celle qui répond au signe — est une parabole $27y^2 = 32p(3x - p)$.

Elle est asymptote aux deux branches paraboliques les plus rapprochées de la partie positive de l'axe des x; cette parabole est tracée en pointillé sur la figure.

Il faut examiner maintenant ce qui arrive quand le point $(\alpha\beta)$ se trouve sur la courbe du quatrième degré, ou dans les deux régions du plan qu'elle sépare.

En appelant $\varphi(m)$ le numérateur de $f'(m)$, on a pour la dérivée seconde $f''(m) = \frac{m\varphi'(m) - 5\varphi(m)}{m^6}$, et il suffit de consulter la valeur de $\frac{\varphi'(m)}{m^5}$, puisque $\varphi(m)$ est nul pour les valeurs de m que l'on a à considérer. On peut aussi supposer β positif à cause de la symétrie par rapport à l'axe des x.

Premier Cas.— Les trois racines de $\varphi(m) = 0$ sont réelles et de plus $\alpha + p$ est positif.

La règle de Descartes montre que l'équation

$$\varphi(m) = \beta m^3 - 2m^2(\alpha + p) + 3m\beta - 4p = 0$$

a ses trois racines positives.

D'après le théorème de Rolle, $\varphi'(m)$ est négatif pour la racine intermédiaire, positif pour les deux autres; il en est de même pour $f''(m)$. Il y a donc un cercle maximum et deux minimums. Les points correspondants sont évidemment situés dans les espaces angulaires cmd, $c'm'd'$.

Deuxième Cas.— Les trois racines de $\varphi(m) = 0$ sont réelles et $\alpha + p$ est négatif.

On a une racine positive et deux négatives. Pour la plus petite racine négative, $\varphi'(m) > 0$, $m^5 < 0$, $f''(m) < 0$, et il y a maximum. Pour la plus grande racine négative $\varphi'(m) < 0$, $m^5 < 0$, $f''(m) > 0$, et il y a minimum. Enfin pour la racine positive $\varphi'(m) > 0$, $m^5 > 0$, $f''m > 0$; on a encore un minimum.

Les points correspondants sont situés dans l'espace angulaire *bab'*. Ce cas ne se distingue du précédent que par l'ordre dans lequel se présentent les cercles maximum et minimum.

TROISIÈME CAS. — Une seule racine de $\varphi(m) = 0$ est réelle. Cette racine est positive, le dernier terme de $\varphi(m)$ étant négatif; $\varphi'(m)$ est positif pour cette racine; $f''(m)$ l'est aussi et par suite on a un minimum. Les points correspondants sont en dehors des espaces angulaires *bab'*, *cmd*, *c'm'd'*.

QUATRIÈME CAS. — $\varphi(m) = 0$ a une racine double.

A cette racine ne correspond ni un maximum, ni un minimum; on a un minimum pour la racine simple.

Les points correspondants sont ceux de la courbe du quatrième degré.

QUESTION 46

Solution par M. GENIN, élève du Lycée Louis-le-Grand.

Démontrer que l'équation $x^m + px^{m-1} + p\dfrac{(p+1)}{1.2}x^{m-2} + Ax^{m-3} \ldots 1\ L = 0$, *dans laquelle* p *est un nombre positif quelconque, a au moins deux racines imaginaires.*

(G. L.)

Soit p positif. On a l'identité

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m = x^m + m\frac{p}{m}x^{m-1}\ \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{p^2}{m^2}x^{m-2} + \varphi(x)$$

ou

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m = x^m + px^{m-1} + \frac{(m-1)p^2}{1.2.m}x^{m-2} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier en x de degré $m - 3$.

L'équation proposée peut donc s'écrire

$$\left[x + \frac{p}{m}\right]^m + \left[\frac{p(p+1)}{1.2} - \frac{(m-1)p^2}{1.2.m}\right]x^{m-1} - \varphi(x)$$
$$+ Ax^{m-3} \ldots L = 0$$

ou, en réduisant

$$\left(x + \frac{p}{m}\right)^m + \frac{p}{1.3.m}(m + p)\,x^{m-2} + \Psi(x) = 0$$

$\Psi(x)$ étant un polynôme entier en x de degré $m - 3$.

Posons $y = x + \dfrac{p}{m}$, l'équation devient

$$y^m + \frac{p}{1.2.m}(m + p)\left(y - \frac{p}{m}\right)^{m-2} + \Psi\left(y - \frac{p}{m}\right) = 0\,;$$

$\Psi\left(\left(y - \dfrac{p}{m}\right)\right.$ est un polynôme entier en y de degré $m - 3$, par suite les termes de degré supérieur à $m - 3$ sont

$$y + \frac{p}{1.2.m}(m + p)\,y^{m-2}.$$

Ces termes sont évidemment de même signe, puisqu'on a supposé p positif, de plus ils présentent une lacune ; donc il y a au moins deux racines imaginaires dans l'équation en y et par suite dans l'équation en x.

QUESTION 54

Solution par M. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

On suppose que l'équation $U = 0$ *a toutes ses racines réelles. Démontrer que les équations*

$$f_1 = U + (x - a)\,U' = 0$$
$$f_2 = U + 3(x - a)\,U' + (x - a)^2\,U'' = 0$$
$$f_3 = U + 7(x - a)\,U' + 6(x - a)^2\,U'' + (x - a)^3\,U''' = 0$$

ont aussi, quel que soit a, *leurs racines réelles (*a *est réel, bien entendu,* U', U'', U'''... *sont les dérivées successives de* U*). Donner l'expression générale de* $f_n = 0$ *et montrer que, en posant*

$$f_n = \alpha_{n,0}U + \alpha_{n,1}(x - a)\,U + \alpha_{n,2}(x - a)^2\,U'' + \ldots$$

on a

$$\alpha_{n,0} = 1\,; \quad \alpha_{n,1} = \frac{2^n - 1}{1}\,; \quad \alpha_{n,2} = \frac{3^n - 2.2^n - 1}{1.2}\,;$$

$$\alpha^{n,3} = \frac{4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1}{1.2.3}, \text{ etc.,}$$

(G.L.)

Étant donnée l'équation $U = 0$ je considère toutes les équations en nombre infini

$$U_1 = U + (x - a)U' ;$$
$$U_2 = U_1 + (x - a)U_1' ;$$
$$U_3 = U_2 + (x - a)U_2' ; \ldots ;$$
$$U_n = U_{n-1} + (x - a)U_{n-1}' ; \ldots \text{etc.}$$

Je dis que toutes ces équations ont leurs racines réelles. En effet, l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles. Il en est de même de l'équation $(x - a)U = 0$, puisque a représente une quantité réelle. Mais alors, d'après un corollaire du théorème de Rolle, l'équation dérivée doit avoir toutes ses racines réelles. Donc l'équation $U_1 = 0$ a toutes ses racines réelles. Par un raisonnement identique, de ce que l'équation $U_1 = 0$ a toutes ses racines réelles, on conclut que l'équation $U_2 = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, et ainsi de suite, de proche en proche, indéfiniment.

Proposons-nous maintenant de calculer les premiers membres de ces équations en fonction des dérivées successives du polynôme U.

D'abord $U_1 = U + (x - a)U'$,

donc $U'_1 = 2U' + (x - a)U''$,

et $(x - a)U'_1 = 2(x - a)U' + (x - a)^2U''$;

alors

$$U_2 = U_1 + (x - a)U'_1 = U + 3(x - a)U' + (x - a)^2U''.$$

On trouverait, en faisant un calcul analogue,

$$U_3 = U + 7(x - a)U' + 6(x - a)^2U'' + (x - a)^3U''' = 0,$$

puis

$$U_4 = U + 15(x - a)U' + 25(x - a)^2U'' + 10(x - a)^3U''' + (x - a)^4U^{(4)} = 0.$$

En général, posons

$$U_{n-1} = U + \alpha_{1,n-1}(x - a)U' + \alpha_{2,n-1}(x - a)^2U'' + \ldots + \alpha_{h,n-1}(x - a)^hU^{(h)} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}(x - a)^{n-1}U^{(n-1)} = 0.$$

$$U'_{n-1} = (1 + \alpha_{1,n-1})\, U' + (\alpha_{1,n-1} + 2\alpha_{2,n-1})\,(x - a)U'' + \ldots + (\alpha_{h-1,n-1} + h\alpha_{h,n-1})\,(x - a)^{h-1}U^{(h)} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}(x - a)^{n-1}U^{(n)}.$$

Donc $(x - a)U'_{n-1} = (1 + \alpha_{1,n-1})\,(x - a)U'$

$$+ (\alpha_{1,n-1} + 2\alpha_{2,n-1})\,(x - a)^2U'' + \ldots + (\alpha_{h-1,n-1} + h\alpha_{h,n-1})\,(x - a)^hU^{h} + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}(x - a)\, U^{(n)}.$$

Donc enfin

$$\begin{aligned} U_n = U &+ (1 + 2\alpha_{1,n-1})(x-a)U' \\ &+ (\alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1})(x-a)^2U'' + \dots \\ &+ [\alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\alpha_{h,n-1}](x-a)U_{(h)} + \dots \\ &+ \alpha_{n-1,n-1}(x-a)^nU^{(h)}. \end{aligned}$$

Donc on a les égalités suivantes :

$$\alpha_{1\,n} = 1 + 2\alpha_{1,n-1};$$

$$\alpha_{2,n} = \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1} \dots$$

en général $\alpha_{h,n} = \alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\,\alpha_{h,n-1}, \dots$

enfin $\alpha_{n,n} = \alpha_{n-1,n-1}$.

De la première de ces égalités je déduis le tableau suivant:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,n} &= 1 + 2\alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{1\,n-1} &= 1 + 2\alpha_{1,n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{1,1} &= 1 + 2\alpha_{1,0} \end{aligned}\right\}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 2^0, la seconde par 2^1, la troisième par 2^2, etc., la dernière par 2^{n-1}, et j'ajoute. J'obtiens, en remarquant que $\alpha_{1,0} = 0$, la relation

$$\alpha_{1,n} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2 \quad - 1.$$

De même

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2,n} &= \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{2,n-1} \\ \alpha_{2,n-1} &= \alpha_{1,n-2} + 3\alpha_{2,n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{2,2} &= \alpha_{1,1} + 3\alpha_{2,1} \\ \alpha_{2,1} &= \alpha_{1,0} + 3\alpha_{2\,0} \end{aligned}\right\}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 3^0, la seconde par 3^1, ... la dernière par 3^{n-1}, et j'ajoute en remarquant que $\alpha_{1,0} = 1$ et que $\alpha_{1,0} = 0$. J'ai la relation $\alpha_{2,n} = \alpha_{1,n-1} + 3\alpha_{1,n-2} + 3^2\alpha_{1,n-3} + \dots + 3^{n-1}\alpha_{1,0}$.

Or $\alpha_{1,n-1} = 2^{n-1} - 1$; $\alpha_{1,n-2} = 2^{n-2} - 1$; etc ... $\alpha_{1,0} = 2^0 - 1$.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_{2n,} = [2^{n-1} + 3\,.\,2^{n-2} + 3^2\,.\,2^{n-3} + \dots + 3^{n-2}\,.\,2 + 3^{n-1}] \\ - [1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}] \end{aligned}$$

ou bien $\alpha_{2,n} = 3^n - 2^n - \dfrac{3^n - 1}{2} = \dfrac{3^n - 2\,.\,2^n + 1^n}{1\,.\,2}$.

On trouverait absolument de la même façon

$$\alpha_{3,n} = \frac{4^n - 3\,.\,3^n + 3\,.\,2^n - 1^n}{1\,.\,2\,.\,3},$$

puis $\alpha_{4,n} = \dfrac{5^n - 4 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, etc.

Nous allons démontrer que cette loi est générale. A cet effet, supposons la loi vraie pour le terme de rang $h - 1$. Ce terme s'écrira donc

$$\alpha_{h-1,n} = \frac{h^n - \frac{h-1}{1}(h-1)^n + \frac{(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2}(h - \ )^n - }{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (h-1)}$$

$$\frac{\ldots + (-1)^k \frac{(h-1)(h-2)\ldots(h-k)}{1 \cdot 2 \ldots k}(h-k)^n + \ldots + (-1)^{h-1} 1^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (h-1)} \quad (1)$$

On peut former le tableau suivant :

$$\alpha_{h,n} = \alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\,\alpha_{h,n-1}$$
$$\alpha_{h,n-1} = \alpha_{h-1,n-2} + (h+1)\,\alpha_{h,n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{h,2} = \alpha_{h-1,1} + (h+1)\,\alpha_{h,1}$$
$$\alpha_{h,1} = \alpha_{h-1,0} + (h+1)\,\alpha_{h,0}$$

Je multiplie la première de ces égalités par $(h+1)^0$, la seconde par $(h+1)^1$, la troisième par $(h+1)^2$, etc., la dernière par $(h+1)^{n-1}$ et j'ajoute. En remarquant que $\alpha_{h,0} = 0$, j'ai la relation suivante:

$$\alpha_{h,n} = \alpha_{h-1,n-1} + (h+1)\alpha_{h-1,h-2} + (h+1)^2\alpha_{h-1,n-3} + \ldots$$
$$+ (h+1)^{n-2}\,\alpha_{h-1,1} + (h-1)^{n-1}\,\alpha_{h-1,0}.$$

De l'équation (1) je déduis les valeurs de $\alpha_{h-1,n-1}$, $\alpha_{h-1,n-2}$, $\ldots$, $\alpha_{h-1,0}$; on a par conséquent

$$1 \cdot 2 \ldots (h-1)\alpha_{h,n} = [h^n + h^{n-1}(h+1) + h^{n-2}(h+1)^2$$
$$\ldots + h(h+1)^{n-1} + (h+1)^n] - \frac{R-1}{1}[(h-1)^n$$
$$+ (h-1)^{n-1}(h+1) + (h+1)^{n-2}(h+1)^2 + \ldots$$
$$+ (h-1)(h+1)^{n-1} + (h+1)^n]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{h-1}[1_n + 1^{n-1}(h+1) + 1^{n-2}(h+1)^2 + \ldots$$
$$+ 1(h+1)^{n-1} + (h+1)^n]$$

ou bien encore

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (h-1)\alpha_{h,n} = \frac{(h+1)^{n+1} - h^{n+1}}{1} - \frac{h-1}{1}$$

$$\frac{(h+1)^{n+1}-(h-1)^{n+1}}{2}+\frac{(h-1)(h-2)}{1.2}\frac{(h+1)^{n+1}-(h-2)^{n+1}}{3}+\ldots+(-1)^{h-1}\frac{(h+1)^{n+1}-1^{n+1})}{h}$$

ou bien

$$1.2.3\ldots(h-1)\alpha_{h,n}=(h+1)^{n+1}\left[\frac{1}{1}-\frac{h-1}{1.2}+\frac{(h-1)(h-2}{1.2.3}-\ldots+(-1)^{h-1}\frac{1}{h}\right]-\frac{h^{n-1}}{1}+\frac{(h-1)}{1}\frac{(h-1)^{n+1}}{2}-\frac{(h-1)(h-2)}{1.2}\frac{(h-2)^{n+1}}{3}+\ldots+(-1)^h\frac{1^{n+1}}{h}$$

ou enfin

$$\alpha_{h,n}=\frac{(h+1)^{n+1}\left[\frac{h}{1}-\frac{h(h-1)}{1.2}+\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}-\ldots\right.}{1.2.3\ldots h}$$

$$\frac{\left.+(-1)^{h-1}\right]-\frac{h}{1}h^{n+1}+\frac{h(h-1)}{1.2}(h-1)^{n+1}-\ldots+(-1)^h1^{n+1}.}{1.2.3\ldots h}$$

Mais on sait que l'on a

$$1-\frac{h}{1}+\frac{h(h-1)}{1.2}-\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^h-0.$$

Donc le coefficient de $(h+1)^{n+1}$ est égal à 1, et finalement

$$\alpha_{h,n}=\frac{(h+1)^{n+1}-\frac{h}{1}h^{n+1}+\frac{h(h-1)}{1.2}(h-1)^{n+1}}{1.2.3\ldots h}$$

$$\frac{-\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^h1^{n+1}}{1.2.3\ldots h}.$$

La loi se trouve ainsi démontrée.

Remarque. — Les différents coefficients trouvés devant être des nombres entiers, on en déduit le théorème d'arithmétique suivant : Je considère les n^{mes} puissances des $(h+1)$ premiers nombres entiers rangés par ordre de grandeur décroissante, si je les multiplie respectivement par les nombres $1, -\frac{h}{1}, +\frac{h(h-1)}{1.2}$, etc. $(-1)^h$, coefficients du

binôme $(a - b)^h$, et si j'ajoute tous ces produits, le nombre ainsi obtenu sera divisible par le produit des h premiers nombres.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Brisse, au sujet de l'article que nous avons fait paraître dans le précédent numéro, une réclamation à laquelle nous nous empressons de faire droit. « La méthode que vous exposez, nous dit M. Brisse, n'est pas nouvelle. Je l'ai donnée pour la première fois à Sainte-Barbe, lorsque je faisais la conférence du cours de Gros, à propos d'une question d'examen, et je crois bien qu'elle a dû être trouvée déjà auparavant. Je la donne tous les ans, dans mon cours à Condorcet, avec la discussion des racines. J'indique notamment quelle modification il faut lui faire subir lorsque l'on a $4p^3 + 27q^2 = 0$, car alors son application cesse d'être exacte. »

L'idée d'appliquer la forme algébrique $P^m - Q^m$, à la résolution des équations nous est venue seulement à l'esprit au mois de juillet de l'année dernière ; il résulte de la lettre que nous a adressée notre collègue que la priorité de cette méthode lui appartient ; à moins, comme il le fait justement observer, qu'elle ne revienne à un autre.

Au sujet du cas particulier signalé par M. Brisse, celui où l'on a $4p^3 + 27q^2 = 0$, nous dirons ici pourquoi nous ne l'avons pas mêlé à la discussion du cas général. Il nous semble que ce cas particulier doit être traité préalablement à la résolution des équations du troisième degré ; et que, soit à propos des racines égales, soit au moment où l'on applique le théorème de Rolle, ou celui de Sturm, on peut montrer comment l'équation se décompose en facteurs du premier degré ; opération qui peut paraître préférable à toute autre.

A propos de cette décomposition, voici une manière de la produire qui peut être donnée en élémentaires ; elle ne

repose sur aucune théorie, mais sur la seule force de la relation, $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Écrivons cette égalité sous la forme

$$\frac{\frac{q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^2} = -\frac{\left(\frac{p}{3}\right)}{\frac{q}{2}} = t$$

on tire de ces relations,

$$p = -\frac{3}{t^2}, \text{ et } q = \frac{2}{t^3}.$$

L'équation proposée devient alors

$$x^3 - \frac{3x}{t^2} + \frac{2}{t^3} = 0,$$

ou encore $$t^3x^3 - 3tx + 2 = 0.$$

Sous cette forme on voit que le premier membre est divisible par $(tx - 1)$ et l'on trouve, identiquement,

$$t^3x^3 - 3tx + 2 = (tx - 1)^2 (tx + 2).$$

La décomposition du trinôme $x^3 + px + q$ se trouve ainsi effectuée, dans le cas particulier où les coefficients p et q vérifient l'égalité $4p^3 + 27q^2 = 0$. *(G. L.)*

BIBLIOGRAPHIE

Traité de balistique rationnelle, par M. *J. Baills*, lieutenant de vaisseau. 1 vol. in-8°. Paris, Delagrave, 1883.

L'auteur s'est proposé, dans ce traité, l'étude raisonnée des phénomènes qui se présentent dans le tir, lorsqu'ils peuvent donner lieu à d'intéressantes considérations de mécanique générale susceptibles d'être conduites géométriquement, plutôt que la recherche de formules pratiquement applicables à la balistique, lesquelles appellent inévitablement le secours de l'empirisme.

L'ouvrage est divisé en six livres.

Le premier traite du mouvement des projectiles à l'extérieur de la bouche à feu. Dans le cas du vide, l'auteur donne une série de problèmes intéressants dont les solutions géométriques feraient l'ornement d'un cours de physique en mathématiques élémentaires. Dans le cas de l'air, il expose l'état de la question de la résistance et montre clairement que si l'on se proposait de lancer un boulet au delà des limites de l'atmosphère, on n'y parviendrait pas avec les pièces de grosseur moyenne, même en portant la vitesse initiale à l'infini :

conclusion bien faite pour ébranler les croyances des jeunes lecteurs de M. Verne. L'auteur rattache aussi directement à la résistance de l'air l'ingénieuse explication donnée par Leibnitz de la baisse barométrique par les temps pluvieux.

Le deuxième livre traite du mouvement des projectiles à l'intérieur de la bouche à feu. L'auteur examine d'abord les conditions géométriques de ce mouvement, en supposant que les gaz suivent la loi de Mariotte, puis les conditions thermodynamiques. Il explique ainsi, d'après M. de Saint-Robert, les résultats inattendus au premier abord pour l'échauffement du canon dans le cas du tir à poudre, à balle et à charge non rendue.

Le troisième livre traite des causes perturbatrices inhérentes à la forme particulière et à l'état dynamique du projectile lancé dans un fluide au repos. L'auteur y expose les lois générales de la dérivation et l'effet de la ceinture de forcement.

Le quatrième livre est relatif au pointage et au tir ; il renferme la théorie de la hausse et des causes d'irrégularité du tir qui ont un caractère de permanence permettant d'en tenir compte. Toute cause permanente d'écart du projectile étant ensuite mise de côté, l'auteur expose aussi élémentairement que possible le calcul des probabilités et l'applique à la justesse du tir.

Le cinquième livre comprend la théorie du recul et celle des freins destinés à le modérer : freins à lames et freins hydrauliques.

Enfin le sixième livre comprend des questions diverses, dont le plan n'était pas nettement indiqué dans les livres précédents. Ce sont le mouvement des fusées, la théorie du loquet de console, des considérations sur le choix des projectiles, sur le pas des rayures st sur celui de la vis-culasse, etc.

L'ouvrage tient, on le voit, toutes les promesses de son titre. La lecture en est attrayante, et le style amicalement familier de l'auteur vous fait croire à une explication orale à laquelle on assisterait. L'exécution typographique est soignée et, pour employer une expression un peu risquée, mais qui fait image, l'air circule dans les formules et dans les figures.

QUESTIONS PROPOSÉES

62. — Sur les centres des n^2 cases d'un damier, on place n jetons de telle façon que deux quelconques d'entre eux ne soient pas situés sur une même ligne parallèle à l'un ou l'autre des bords du damier. Démontrer que le nombre t_n des dispositions distinctes est égal à $1.2 \ldots n$, et que les jetons sont toujours en nombre pair sur les cases de couleur contraire à celle du coin inférieur de gauche.

— On suppose de plus que les jetons ne sont pas situés sur les cases d'une diagonale. Démontrer que, si l'on désigne par Θ_n le nombre des dispositions distinctes, on a

$$\Theta_{n+1} = n(\Theta_n + \Theta_{n-1})$$
$$\Theta_{n+1} = (n + 1)\Theta_{n-1}.$$

— Démontrer que le rapport de t_n à Θ_n a pour limite la base du système des logarithmes supérieurs, lorsque n augmente indéfiniment.

— En supposant de plus que les jetons ne soient pas situés sur les cases des deux diagonales, calculer le nombre τ_n des dispositions et la limite de t_n à τ_n lorsque n augmente indéfiniment.

— Démontrer que le nombre maximum des jetons que l'on peut placer sur les cases de telle sorte que deux jetons ne soient pas situés sur une parallèle à l'une ou l'autre des diagonales est $2_n - 2$, et que le nombre des dispositions distinctes de ces $2_n - 2$ jetons est 2^n. *(E. Lucas.)*

63. — Construire une conique osculatrice à une conique donnée en un point donné et passant par deux points donnés, ou tangente à deux droites. *(Kœhler.)*

64. — Construire une parabole connaissant le cercle osculateur en un point, et la tangente commune qui ne passe pas par le point d'osculation. *(Kœhler.)*

65. — Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits à tous les triangles polaires conjugués par rapport à une parabole. *(Kœhler.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12016-2.

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

D'après M. **Amigues**, professeur de mathématiques spéciales
au Lycée de Marseille.

Toute équation algébrique entière $f(x) = o$, à coefficients réels ou imaginaires, admet au moins une racine réelle ou imaginaire.

Soit a une quantité quelconque. Si $f(a) = o$, le théorème est démontré. A défaut, le polynôme $f(x)$ donne pour toute valeur réelle ou imaginaire de h

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

Quelques-unes des quantités $f(a)$, $f'(a)$... peuvent être nulles, mais on arrive toujours à l'une d'elles qui ne l'est pas, car sans cela on aurait pour toute valeur de h

$$f(a + h) = f(a)$$

où bien pour toute valeur de u

$$f(u) = f(a)$$

et le polynôme se réduirait à une constante.

On a donc

$$f(a + h) = A(\cos \alpha + i \sin \alpha) + B(\cos \beta + i \sin \beta)h^p$$
$$+ C(\cos \gamma + i \sin \gamma)h^{p+1} + \text{etc.}$$

Soit $h = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, ρ et θ étant arbitraires, puisque h est quelconque.

On peut écrire, en appliquant en même temps la formule de Moivre et la règle de multiplication des imaginaires,

$$f(a + h) = A(\cos \alpha + i \sin \alpha) +$$
$$B\rho^p [\cos(\beta + p\theta) + i \sin (\beta + p\theta)] +$$
$$C\rho^{p+1} [\cos(\gamma + \overline{p + 1}\theta) + i \sin (\gamma + \overline{p + 1}\theta)] + \dots$$

Choisissons θ de manière que l'on ait

$$\beta + p\theta = \pi + \alpha <$$

On a alors

$$f(a + h) = (A - B\rho^p)(\cos \alpha + i \sin \alpha) +$$
$$C\rho^{p+1} (\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1) + D\rho^{p+2} (\cos \delta_1 + i \sin \delta_2) + \dots$$

Imposons à ρ la condition suivante

$$A - B\rho^p > 0$$

ou, puisque B n'est pas nul,

$$\rho^p < \frac{A}{B}. \qquad (1)$$

Puisque $A \gtrless 0$, on peut toujours trouver un nombre positif λ tel que toutes les valeurs de ρ moindres que λ satisfassent à cette inégalité.

Pour les valeurs moindres que λ, la quantité $(A - B\rho^p)$ est un module et, comme le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules de ses parties, on a

$$\text{mod}\, f(a+h) \leq (A - B\rho^p) + C\rho^{p+1} + D\rho^{p+2} + \ldots$$

ou bien

$$\text{mod}\, f(a+h) \leq A - \rho^p\,(B - C\rho - D\rho^2\ \ldots)$$

Soit ε un nombre positif moindre que B.

On peut toujours trouver un nombre positif μ tel que toutes les valeurs de ρ moindres que μ satisfassent à l'inégalité suivante :

$$(B - \varepsilon) - C\rho - D\rho^2 - \ldots > 0$$

puisque le premier terme de ce polynôme en ρ est $(B - \varepsilon)$ et qu'il est positif.

Cette inégalité devient

$$B - C\rho - D\rho^2 - \ldots > \varepsilon$$

et donne
$$B - C\rho - D\rho^2 - \ldots = \varepsilon + \varphi, \qquad (2)$$

φ étant un nombre positif.

En résumé, pour toutes les valeurs de ρ moindres que λ on a l'inégalité (1), et pour toutes les valeurs de ρ moindres que μ on a l'égalité (2). Par conséquent, pour toutes les valeurs de ρ qui sont moindres que λ et que μ, on a en combinant cette inégalité et cette égalité

$$\text{mod}\, f(a+h) \leq A - \rho^p(\varepsilon + \varphi)$$

et par suite
$$\text{mod}\, f(a+h) \leq A - \varepsilon\rho^p.$$

Parmi les valeurs finies de ρ qui sont moindres que λ et μ, choisissons-en une. Alors h est une quantité finie et déterminée, et $\varepsilon\rho^p$ est aussi un nombre fini et déterminé que nous appellerons σ. On a ainsi

$$\text{mod}\, f(a+h) \leq A - \sigma$$

ou
$$\text{mod}\, f(a+h) \leq \text{mod}\, f(a) - \sigma.$$

Si le premier membre est nul, l'équation a une racine. A défaut, on peut trouver une quantité finie h_1 et un nombre fini σ_1 tels que l'on ait

$$\text{mod}\, f(a + h + h_1) \leq \text{mod}\, f(a + h) - \sigma_1.$$

Si le premier membre est nul, l'équation a une racine; sinon, on a d'une manière analogue

$$\text{mod}\, f(a + h + h_1 + h_2) \leq \text{mod}\, f(a + h + h_1) - \sigma_2$$

et ainsi de suite, tant qu'on ne trouvera pas de racine.

Ajoutant membre à membre, on a

$$\text{mod}\, f(a + h + h_1 \ldots + h_n) \leq \text{mod}\, f(a) - (\sigma + \sigma_1 \ldots + \sigma_n).$$

Si l'équation n'avait pas de racine, cette inégalité serait vraie pour toutes les valeurs entières de n. Or une pareille conclusion est absurde. Car les quantités σ n'étant pas infiniment petites, on peut trouver des valeurs finies de n pour lesquelles le second membre est négatif.

Il suffit pour cela que l'on ait

$$\text{mod}\, f(a) < \sigma + \sigma_1 + \sigma_2 \ldots + \sigma_n$$

ou en appelant τ le plus petit des σ

$$\text{mod}\, f(a) < (n + 1)\tau$$

$$n + 1 > \frac{\text{mod}\, f(a)}{\tau}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Solution de M. BERTAGNE, élève du Lycée de Marseille.

D'un point P *pris sur une normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds* B, C, D *et* E; *1° on demande de trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D *et* E; *2° de trouver le lieu des centres* I *de la sphère* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

1° *Équation de la sphère.* — Soit, en coordonnées rectangulaires, l'équation du paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A ; les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{X - x_0}{-1} = \frac{p(Y - y_0)}{y_0} = \frac{y(Z - z_0)}{z_0} = \rho\,;$$

u étant la valeur particulière de ρ qui définit le point P, les coordonnées de ce point sont

$$x = x_0 - u,\ y = \frac{y_0(p + u)}{p},\ z = \frac{z_0(q + u)}{q}.$$

Il en résulte donc que les coordonnées x, y, z de l'un quelconque des points B, C, D et E doivent satisfaire aux deux équations suivantes :

$$\frac{x_0 - u - x}{-1} = \frac{y_0(p + u) - py}{y} = \frac{z_0(q + u) - qz}{z}$$

ou bien aux deux équations

$$z(x_0 - x) = (z - z_0)(q + u), \qquad (1)$$
$$y(x_0 - x) = (y - y_0)(p + u), \qquad (2)$$

et en outre on a $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, car les pieds des normales sont sur le paraboloïde.

Cherchons maintenant une surface du deuxième ordre qui passe par les quatre points B, C, D, E ainsi que par le pied qui est à l'infini ; mais qui ne passe pas par le point A. Pour cela, écrivons l'équation du paraboloïde sous la forme

$$\frac{(y - y_0)(y + y_0)}{p} + \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{q} = 2(x - x_0) \quad (3)$$

et portons les valeurs de $y - y_0$ et $z - z_0$ dans cette équation (3)

$$\frac{y(y + y_0)(x_0 - x)}{p(p + u)} + \frac{z(z + z_0)(x_0 - x)}{q(q + u)} = 2(x - x_0)$$

Supprimons la solution $x = x_0$ et ordonnons :

$$qy^2(q + u) + pz^2(p + u) + qy_0(q + u)y + pz_0(p + u)z$$
$$+ 2pq(p + u)(q + u) = 0. \qquad (\alpha)$$

Nous allons chercher à présent l'équation d'une quadrique qui passe par les cinq points A, B, C, D, E. Pour cela multiplions les deux membres de l'équation du paraboloïde

par x $$\frac{xy \times y}{p} + \frac{xz \times z}{q} = 2x^2$$

et remplaçons xy et xz par leurs valeurs tirées des équation

(1) et (2). Nous obtenons ainsi la surface cherchée

$$\frac{y[x_0y-(y-y_0)(p+u)]}{p}+\frac{z[x_0z-(z-z_0)(q+u)]}{q}=2x^2$$

ou
$$2pqx^2+q(p+u-x_0)y^2+p(q+u-x_0)z^2$$
$$-qy_0(p+u)y-pz_0(q+u)z=0. \qquad (\beta)$$

Nous avons ainsi obtenu trois surfaces (α) (β) (γ) qui passent par les quatre points B, C, D et E.

$$\begin{array}{l|l} 1 & (\beta)\ 2pqx^2+q(p+u-x_0)y^2+p(q+u-x_0)z^2 \\ & \qquad -qy_0(p+u)\,y-pz_0(q+u)z=0 \\ \lambda & (\alpha)\ q(q+u)y^2+p(p+u)z^2+qy_0(q+u)y+pz_0(p+u)z \\ & \qquad +2pq(p+u)\,(q+u)=0 \\ \mu & (\gamma)\ qy^2+pz^2-2pqx=0 \end{array}$$

et il semblerait que nous devrions chercher trois autres surfaces passant par les quatre points B, C, D, E pour obtenir l'équation générale des surfaces du deuxième ordre passant par ces quatre points ; mais grâce à la forme particulière des équations déjà trouvées, cette recherche est inutile. En effet, multiplions la première par 1, la deuxième par λ, la troisième par μ et ajoutons : nous obtenons alors l'équation d'une surface passant par les quatre points B, C, D et E :
$$\beta+\lambda\alpha+\mu\gamma=0.$$

Pour que ce soit une sphère il faut et il suffit que l'on ait
$$p+u-x_0+\lambda(q+u)+\mu=2p$$
$$q+u-x_0+\lambda(p+u)+\mu=2q$$
d'où
$$\lambda=-1 \text{ et } \mu=p+q+x_0.$$

L'équation de la sphère cherchée est donc
$$2pq(x^2+y^2+z^2)-2pq(p+q+x_0)x-qy_0(p+q+2u)y$$
$$-pz_0(p+q+2u)z-2pq(p+u)\,(q+u)=0.$$

2° *Lieu du centre.* — Les équations du centre sont
$$2x=p+q+x_0$$
$$4py=y_0(p+q+2u)$$
$$4qz=z_0(p+q+2u).$$

Éliminons $p+q+2u$ entre ces trois équations et nous obtiendrons ainsi la ligne qui constitue le lieu des centres. C'est la droite représentée par les deux équations
$$2q=p+q+x_0 \text{ et } \frac{py}{y_0}=\frac{xz}{z_0}.$$

3° *Surface engendrée par la droite* PI. — Les équations de

la droite PI sont :

$$\frac{x+u-x_0}{\frac{p+q+x_0}{2}+u-x_0} = \frac{y-\frac{y_0(p+u)}{p}}{\frac{y_0}{p}\left[\frac{p+q+2u}{4}-p-u\right]}$$
$$= \frac{z-\frac{z_0(q+u)}{q}}{\frac{z_0}{q}\left[\frac{p+q+2u}{4}-q-u\right]}$$

elle s'appuie déjà sur la normale en A et sur la ligne lieu des centres; si donc elle demeure parallèle à un plan fixe, la surface cherchée sera un paraboloïde hyperbolique : car ces deux droites ne se rencontrent pas puisque leurs plans projetant sur les yz sont parallèles.

Prenons un plan $Ax+By+Cz=0$. Pour qu'il soit parallèle à la droite génératrice il faut que l'on ait l'identité en u :

$$A\left(\frac{p+q+x_0}{2}+u-x_0\right)+\frac{By_0}{p}\left[\frac{p+q+2u}{4}-p-u\right]$$
$$+\frac{Cz_0}{q}\left[\frac{p+q+2u}{4}-q-u\right]=0.$$

Cette identité permet de calculer A, B, C ou plutôt les rapports de deux de ces quantités à la troisième.

Ce plan n'est d'ailleurs ni parallèle à la normale en A, ni parallèle à la droite lieu des centres, car la droite génératrice rencontre ces deux droites fixes.

Deuxième solution

Soient $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0 \qquad (1)$$

l'équation de la surface; α, β, γ les coordonnées de ces points.

Si t désigne l'abscisse d'un point de la normale au point α, β, γ, les deux autres coordonnées seront

$$\frac{\beta}{p}(p+\alpha-t) \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{q}(q+\alpha-t).$$

Les équations qui expriment que la normale en x, y, z passe au point considéré sont

$$xy + (p - t)y - \beta(p + \alpha - t) = 0 \qquad (2)$$
$$xz = (q - t)z - \gamma(q + \alpha - t) = 0 \qquad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) déterminent les coordonnées des pieds des cinq normales; $\alpha\beta\gamma$ est un système de solution.

Si trois surfaces du second degré ont leurs axes parallèles, il passe une sphère par leurs points d'intersection. Je me propose d'après cela de former les équations de deux surfaces du second degré passant par les pieds des quatre normales distinctes de la normale en $\alpha\beta\gamma$.

Pour cela je multiplie (2) et (3) respectivement par $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{q}$; j'ajoute, et en tenant compte de (1) je trouve

$$2x^2 + \frac{p-t}{p} y^2 - \beta(p + \alpha + t)\frac{y}{p} + \frac{q-t}{q} z^2 - \gamma(q + \alpha - t)\frac{z}{q} = 0. \qquad (4)$$

J'écris ensuite les équations (1), (2), (3) de la manière suivante :

$$\frac{(y+\beta)}{p}(y - \beta) + \frac{z+\gamma}{q}(z - \gamma) - 2(x - \alpha) = 0. \qquad (1')$$
$$(x - \alpha)y + (p + \alpha - t)(y - \beta) = 0, \qquad (2')$$
$$(x - \alpha)z + (q + \alpha - t)(z - \gamma) = 0. \qquad (3')$$

J'élimine $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ entre (1') (2') (3') et il vient

$$\frac{(q + \alpha - t)}{p} y(y + \beta) + \frac{(p + \alpha - t)}{q} z(z + \gamma) + 2(p + \alpha - t)(q + \alpha - t) = 0. \qquad (5)$$

L'équation générale des surfaces passant par (1), (4), (5) est

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\left[\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x\right] + 2x^2 + \frac{(p-t)}{p} y^2 \\ \frac{q-t}{q} z^2 - \beta\frac{p+\alpha-t}{p} y - \gamma\frac{q+\alpha-t}{q} z \\ + \mu\left\{\frac{q+\alpha-t}{p} y(y+\beta) + \frac{p+\alpha-t}{p} z(z+p)\right. \\ \left. \qquad + 2(p+\alpha-t)(q+\alpha-t)\right\} \end{array}\right| = 0.$$

J'exprime que cette surface est une sphère; j'ai

$$\mu = -1, \qquad \lambda = p + q + \alpha$$

et l'équation devient

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(p + q + \alpha)x - \frac{\beta}{p}(p + q + 2\alpha - 2t)y$$

$$-\frac{\gamma}{p}(p + q + 2\alpha - 2t)z - 2(p + \alpha - t)(q + \alpha - t) = 0.$$

Telle est l'équation de la sphère.

Les coordonnées du centre sont :

$$x = \frac{p + q + \alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{4p}(p + q + 2\alpha + 2t),$$

$$z = \frac{\gamma}{4q}(p + q + 2\alpha - 2t).$$

Le lieu du centre est donc une droite située dans un plan parallèle au plan des yz. Elle a pour équation dans ce plan

$$\frac{py}{\beta} = \frac{qz}{\gamma}.$$

La droite qui joint le point d'où sont issues les quatre normales, au centre de la sphère, a pour équation

$$\frac{x - t}{\dfrac{p + q + \alpha}{2} - t} = \frac{y - \dfrac{\beta}{p}\left(p + \alpha - t\right)}{\dfrac{\beta}{4p}\left[p + q + 2\alpha - 2t\right] - \dfrac{\beta}{p}\left(p + \alpha + t\right)}$$

$$= \frac{z - \dfrac{\gamma}{q}\left(q + \alpha - t\right)}{\dfrac{\gamma}{4q}\left[p + q + 2\alpha - 2t\right] - \dfrac{\gamma}{q}\left(q + \alpha - t\right)}.$$

Il est facile de voir que, t variant, cette droite reste parallèle à un plan fixe. La surface engendrée est donc un paraboloïde hyperbolique.

NOTA. — Nous avons reçu de cette question une troisième solution un peu différente de celles que l'on vient de lire, et dont l'auteur est M. Dereins, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski), solution très simple et très élégante.

CONCOURS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
EN 1883

Épure.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 12 centimètres. La face ABC est horizontale; le sommet D est au-dessous de ABC.

Soit P le cône qui a pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD.

Soit Q le cylindre de révolution qui a pour axe la droite BC et pour rayon 5 centimètres.

On demande la projection horizontale du solide formé par ce qui reste du tétraèdre quand on a supprimé la partie de ce tétraèdre qui est comprise dans le cône P et celle qui est comprise dans le cylindre Q.

Triangle.

$$A = 75^\circ\, 35'\, 25''$$
$$b = 5825{,}755$$
$$c = 4753{,}826$$

Composition française.

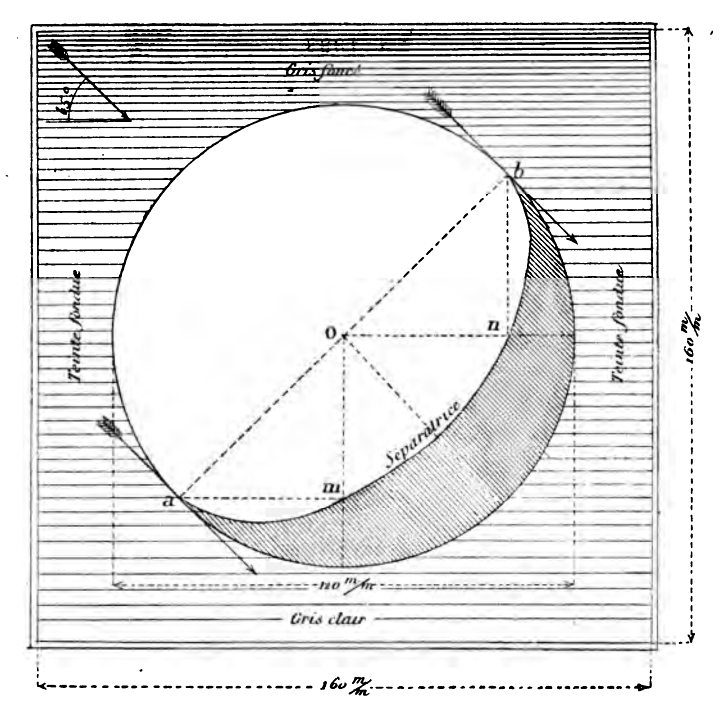
« Quand on travaille sur les grandes matières, a dit Montesquieu, il ne suffit pas de consulter son zèle, il faut encore consulter ses lumières : et si le ciel ne nous a pas accordé de grands talents, on peut y suppléer par la défiance de soi-même, l'exactitude, le travail et les réflexions. »

On appréciera et on discutera cette pensée, on en fera valoir tous les termes, et on recherchera quelle en est la portée pratique.

Lavis (3 heures).

Faire à l'encre de Chine, *à teintes plates*, le lavis d'une sphère (dépolie, ou mi-polie, à volonté), se détachant sur un fond gris, dégradé de haut en bas.

On se conformera aux cotes indiquées, en millimètres, sur le croquis ci-joint.



La sphère sera éclairée par le rayon ordinaire à 45°.

Le croquis indique la manière d'obtenir rapidement quatre points (a, m, n, b) de la *séparatrice* d'ombre et de lumière.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(Composition de mathématiques du 20 juin 1883.)

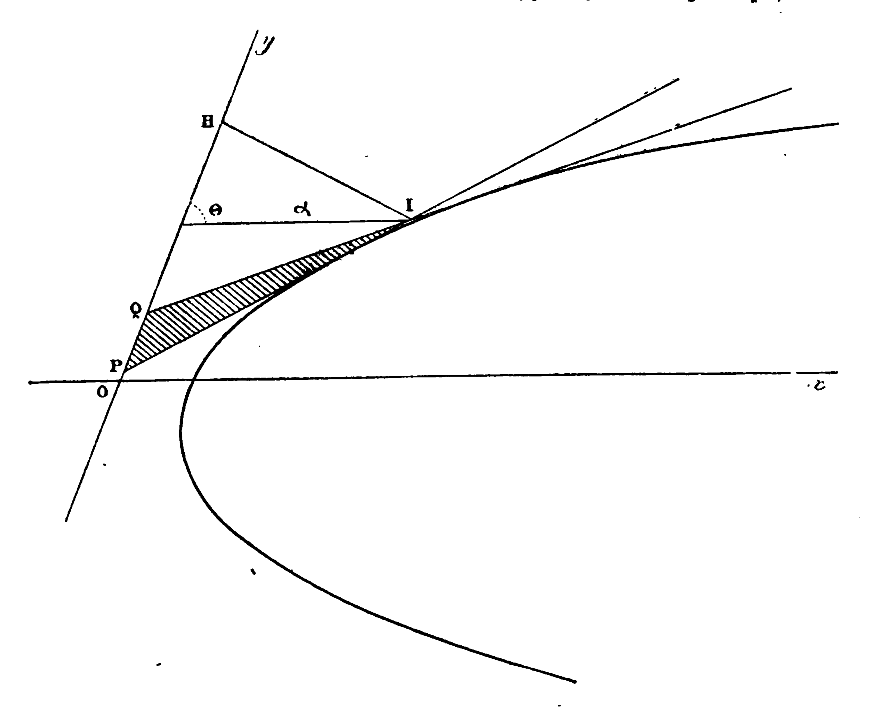
On donne une parabole P *et une droite* D. *On demande le lieu des points tels que les tangentes menées de ce point à la parabole forment avec la droite* D *un triangle de surface donnée.*

1. — Recherche de l'équation du lieu. — Prenons pour axe des y la droite donnée et pour axe des x le diamètre conjugué; l'équation de la parabole est alors (*)

$$y^2 = 2p(x - a)$$

Le faisceau des deux droites IP, IQ qui déterminent avec Oy un triangle IPQ de surface donnée a pour équation

$$(y^2 - 2px + 2pa)(\beta_2 - 2p\alpha + 2pa) = (\beta y - px + 2ap - p\alpha)^2$$



α, β désignant les coordonnées du point I. Les longueurs OP et OQ sont les racines de l'équation

$$(y^2 + 2pa)(\beta_2 - 2p\alpha + 2pa) = (\beta y + 2ap - p\alpha)^2$$

ou $$2y^2(\alpha - a) + 2\beta y(2a - \alpha) + p\alpha^2 - 2a\beta^2 = 0.$$

On a donc

(*) p, dans ce calcul, ne désigne pas, bien entendu, le périmètre de la parabole.

$$PQ = \frac{\sqrt{\beta^2 (2a - \alpha)^2 - 2 (\beta - a)(p\alpha^2 - 2a\beta^2)}}{\alpha - a}$$

ou, après réduction,

$$PQ = \frac{\alpha}{\alpha - a} \sqrt{\beta^2 - 2p (\alpha - a)}.$$

La surface du triangle IPQ, surface qui est donnée et que nous désignerons par m^2, est égale à $\frac{PQ.IH}{2}$.

Or l'on a $\qquad IH = \alpha \sin \theta.$

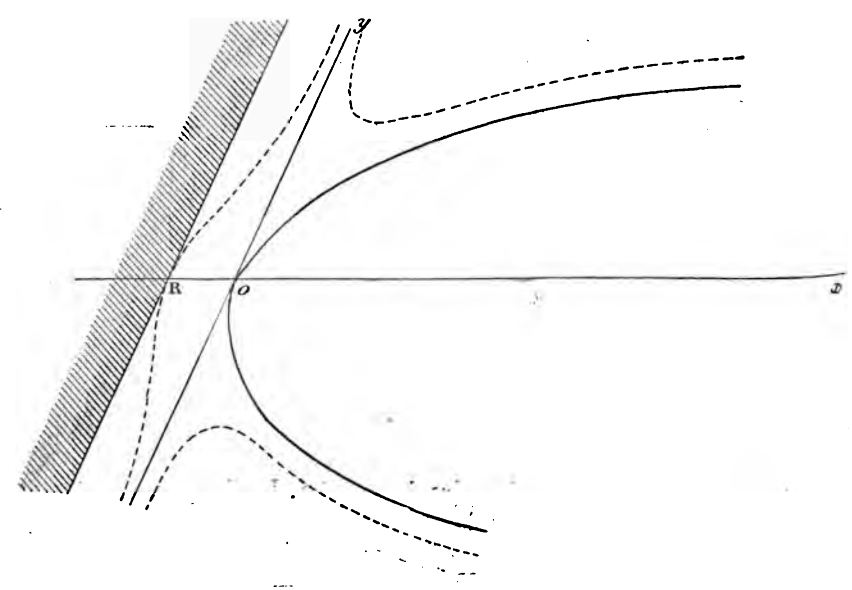
On peut donc poser

$$2m^2 (\alpha - a) = \alpha^2 \sin^2 \theta \sqrt{\beta^2 - 2p (\alpha - a)}$$

ou, en rendant α, β coordonnées courantes,

$$4m^4 (x - a)^2 = x^4 \sin^2 \theta \left\{ y^2 - 2p (x - a)\right\}. \qquad (A)$$

C'est l'équation de la courbe.



2. — Examen du cas où $a = o$. — L'équation que nous venons de trouver représente une courbe du sixième degré, mais elle n'est que du quatrième degré quand on suppose $a = o$. Il faut pourtant observer que l'on supprime alors

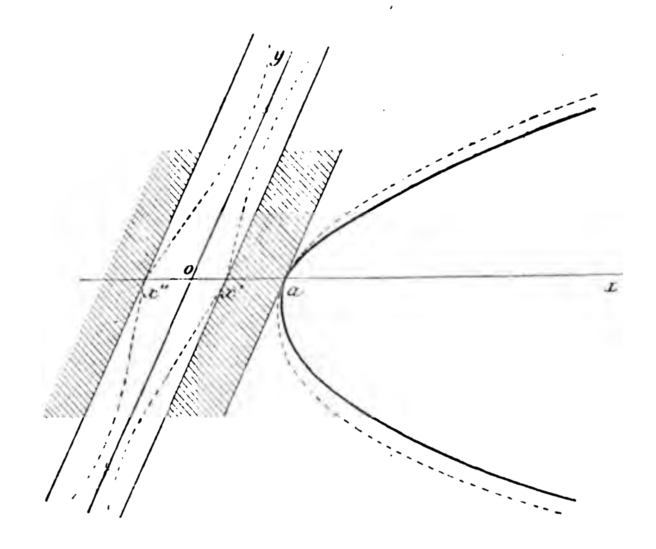
la solution $x^2 = 0$. Cette solution singulière s'explique d'ailleurs en remarquant que les tangentes, issues d'un point de l'axe des y forment un triangle dont la base est infinie et la hauteur nulle. Nous examinerons d'abord ce cas particulier.

L'équation du lieu est

$$y^2x^2 \sin^2 \theta = 2 (2m^4 + px^3 \sin^2 \theta).$$

D'ailleurs, l'équation (A) prouve que la courbe est, dans tous les cas, extérieure à la parabole donnée et que celle-ci est une parabole asymptote. La courbe a donc la forme qu'indique la figure ci-jointe. La tangente parallèle à l'axe des x, ne pas peut se construire avec la règle et le compas; elle est donnée par l'équation $x = \sqrt[3]{\dfrac{4\, m^4}{p \sin^2\theta}}$, valeur que l'on peut calculer avec telle approximation que l'on veut.

Dans la figure (2), on a pris $OR = \sqrt{-\dfrac{2\, m^2}{p \sin^2 \theta}}$,



3. — Examen du cas où l'on suppose $a > 0$. — L'équation (A) étant écrite sous la forme

$$y^2x^4\sin^2\theta = 2(x - a) \left\{ px^4\sin^2\theta + 2m^4 (x - a) \right\}$$

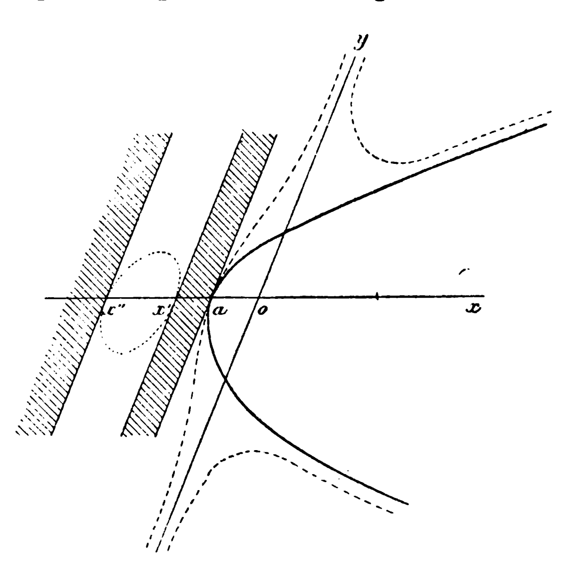
on peut observer que la discussion qui est relative aux formes différentes de la courbe porte principalement sur la réalité des racines de l'équation

$$px^4\sin^2\theta + 2m^4x - 2m^4a = 0. \qquad (B)$$

Dans l'hypothèse que nous avons faite, a étant positif, on voit que cette équation qui est du quatrième degré, et dont le dernier terme est d'un signe contraire au premier admet deux racines réelles : l'une positive x', l'autre négative x''.

La courbe a donc la forme indiquée par le trait ponctué de la figure 3.

4. — Examen du cas où l'on suppose $a < 0$. — Différentes formes de courbe correspondent à cette hypothèse suivant que l'équation (B) a deux racines réelles, deux racines égales, ou quatre racines imaginaires.



Cherchons donc à différentier les différents cas. L'équation (B) peut s'écrire

$$x^4 + 2\lambda x - 2\lambda a = 0.$$

en posant
$$\lambda = \frac{m^4}{p\sin^2\theta}$$

En discutant cette équation, par le théorème de Rolle, on trouve sans difficulté qu'en posant

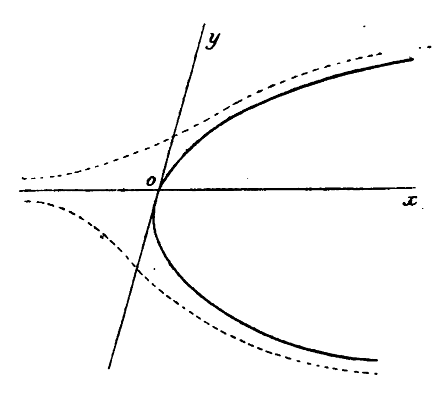
$$u = 27m^4 + 128pa^3\sin\theta,$$

l'équation a deux racines réelles quand u est positif, deux racines égales quand $u = 0$, enfin quatre racines imaginaires quand on suppose que u est négatif.

De cette discussion résultent trois formes de courbe. La première est indiquée par la figure ci-dessous. Les deux autres ne diffèrent de celle-ci que par la suppression de l'ovale, qui devient un point double isolé, dans l'hypothèse $u = 0$ et qui disparaît complètement quand on suppose $u < 0$.

5. — Remarque relative à un cas particulier. — Le choix que nous avons fait des axes de coordonnées n'est pas imposé seulement par la simplicité plus grande qui en résulte pour les calculs ; on doit remarquer qu'il était encore nettement indiqué si l'on observe, *à priori*, que, pour des raisons évidentes, la courbe était symétrique par rapport au diamètre conjugué des cordes parallèles à la droite donnée D; cette symétrie étant oblique et définie, au point de vue de sa direction, par D.

Il faut pourtant remarquer que ce choix d'axes ne peut pas être adopté dans le cas où D est un diamètre de la parabole. Il est donc nécessaire d'examiner ce cas particulier, et c'est ce que l'on fait très simplement comme nous allons le montrer.



Prenons pour axes la droite D et la tangente à la parabole en son point de rencontre. Soient α, β les coordonnées d'un point du lieu, le faisceau quadratique des tangentes issues de ce point à la

parabole est

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = (\beta y - px - p\alpha)^2.$$

En faisant $y = 0$, on a pour le segment intercepté sur l'axe de x, $\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}$; l'équation du lieu est, d'après cette remarque,

$$y^4 \sin^2\theta\,(y^2 - 2px) = 4m^4p^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme indiquée par la figure.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Composition du 25 juin 1883.

Mathématiques.

On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$(x^2 + y^2)x = ay^2.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former : 1° l'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent le point O aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que, si les trois tangentes sont réelles, le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles (C_m) dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en trois des quatre points où il la rencontre concourent en un même point: soit M ce point de concours pour le cercle C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle C_m et à la cissoïde pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles C_m par deux points donnés

P, Q du plan ? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles C_m ?

Composition du 26 juin 1883.

Philosophie.

Expliquer et apprécier les quatre règles dans lesquelles Descartes résume sa méthode :

« La première, dit-il, était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ;

« La seconde, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre ;

« La troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés, en supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres ;

« Et la dernière, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre. »

Composition du 27 juin 1883.

Physique.

I. — *Théorie du baromètre-balance.* Le tube barométrique est attaché par le haut au fléau d'une balance. On supposera que la section du tube est égale à un centimètre carré. Celle de la chambre barométriqne est plus grande ; on la désignera par a. Le bas du tube est mastiqué ou soudé à un manchon soit en bois, soit en fonte, dont la section est b. Ce manchon est le bas d'un tube plongé dans le mercure de la cuvette dont la section est c. On établira l'équation d'équilibre et la condition de sensibilité, c'est-à-dire la variation de poids correspondant à une variation d'un millimètre dans la colonne barométrique.

II. — Un cube de verre d'indice n repose sur une planchette horizontale noircie. Sur sa base inférieure, on a déposé une goutte de suif, et l'on regarde cette goutte par la face verticale du cube, opposée à celle qui est tournée vers la lumière. En partant de la verticale et inclinant lentement le rayon visuel vers l'horizon, on voit tout d'un coup la goutte qui devient très brillante. On mesure alors l'angle du rayon visuel avec la verticale, soit α cet angle. On demande x l'indice de réfraction du suif.

Exemple. Soit $n = 1,55$, $\alpha = 65°$, $\sin^2 \alpha = 0,8236$. Trouver x.

III. — Quelle est la température maximum que l'on peut produire par la combustion de l'hydrogène, en supposant que toute la chaleur produite soit employée à chauffer les produits de la combustion ?

Composition du 28 juin 1883.

Version latine.

TOUTES LES PLANÈTES SONT EMPORTÉES AUTOUR DU SOLEIL PAR LE CIEL QUI LES CONTIENT

Sublato omni scrupulo de terræ motu, putemus totam materiam cœli in qua planetæ versantur, in modum cujusdam vorticis, in cujus centro est sol, assidue gyrare, ac ejus partes soli viciniores celerius moveri quam remotiores, planetasque omnes, e quorum numero est terra, inter easdem istius cœlestis materiei partes semper versari. Ex quo solo, sine ullis machinamentis, omnia ipsorum phænomena facillime intelligentur. Ut enim in iis fluminum locis, in quibus aqua in se ipsam contorta vorticem facit, si variæ festucæ illi aquæ incumbant, videbimus ipsas simul cum ea deferri, et nonnullas etiam circa propria centra converti; et eo celerius integrum gyrum absolvere, quo centro vorticis erunt viciniores; et denique, quamvis semper motus circulares affectent, vix tamen unquam circulos omnino perfectos describere, sed nonnihil in longitudinem et latitudinem aberrare. Ita eadem omnia de planetis absque ulla difficul-

tate possumus imaginari, et per hoc unum cuncta eorum phænomena explicantur.

R. DESCARTES.

QUESTIONS D'EXAMENS (1883)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un paraboloïde soit équilatère.*

Les notations ordinaires étant adoptées les conditions sont :

$$H \gtrless 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et } A + A' + A'' = 0.$$

Cette dernière relation peut être obtenue, soit directement, soit en remarquant que si les deux plans directeurs sont rectangulaires, on peut considérer l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byr + 2B'rx + 2B''xy = 0$$

Comme représentant un cône sur lequel on peut placer les trois arêtes d'un trièdre trirectangle ; l'une de ces arêtes étant la droite commune.

2. — *Démontrer que l'équation*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

La forme de cette équation montre qu'elle est tout au plus du troisième degré. Elle a certainement une racine entre 1 et 2 ; et une autre entre 3 et 4. La troisième racine est infinie ; le terme en x^3 disparaît, en effet, quand on chasse les dénominateurs.

On peut aussi remarquer que l'équation peut être écrite de la manière suivante

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}$$

ou

$$\frac{2}{(x-1)(x-3)} = \frac{-2}{(x-2)(x-4)}$$

Cette combinaison des termes de l'équation proposée met en évidence ce fait que celle-ci est du second degré.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître, par les substitutions indiquées plus haut, que l'équation

$$(x - 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 4) = 0$$

a ses racines réelles et comprises l'une dans l'intervalle 1, 2, l'autre dans l'intervalle 3, 4.

On peut, évidemment généraliser cette question et considérer l'équation

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} - \frac{1}{x - c} - \frac{1}{x - d} = 0,$$

a, b, c, d désignant des nombres inégaux.

3. — *Est-il bien exact de dire que l'on peut substituer, à la suite des fonctions de Sturm, la suite*

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots\ f^m(x) \qquad (A)$$

quand l'équation $f(x) = 0$, *a toutes ses racines réelles ?*

Le programme s'exprime dans les termes suivants : *lorsque toutes les racines sont réelles, on peut substituer aux fonctions de Sturm les dérivées successives du premier membre de l'équation.* Mais il semble qu'il y ait là une légère incorrection, que l'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Disons d'abord que l'incorrection n'existe pas dans le cas général, dans le cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles et *inégales.* Mais la suite de Sturm et la suite (A), (la suite de Fourier, comme on la nomme quelquefois) ne donnent pas *les mêmes résultats*, dans le cas des racines multiples et, pour ce motif, on ne doit pas dire que l'on peut substituer l'une à l'autre.

Imaginons, en effet, la suite de Sturm et celle de Fourier ; puis cherchons combien l'équation $f(x) = 0$ a de racines réelles dans l'intervalle α, β. S'il existe, pour citer un exemple, dans cet intervalle, deux racines, l'une de multiplicité p, l'autre de multiplicité q. la suite de Sturm révèlera la perte de deux variations ; tandis que celle de Fourier signalera la disparition de $(p + q)$ variations. En d'autres termes, et dans le cas où nous nous sommes placés, les fonctions de Sturm indiquent le nombre des racines réelles de l'intervalle

α, β ; abstraction faite de leur degré de multiplicité ; la suite de Fourier indique le nombre de ces racines, en tenant compte de leurs degrés respectifs de multiplicité. En résumé, deux choses qui ne donnent pas *toujours et dans tous les cas*, des résultats identiques ne peuvent pas être substituées l'une à l'autre, si l'on n'ajoute pas dans quel cas cette substitution est légitime.

4. — *Réduire des fractions algébriques au plus petit dénominateur commun.*

Cette théorie offre la plus grande analogie avec la théorie semblable, et plus connue, de l'arithmétique.

5. — *On donne sur un ellipsoïde un point* α, β, γ ; *en ce point on mène une normale* Δ, *à la surface. Quels sont les points de l'ellipsoïde, tels que les normales à la surface en ces points rencontrent la normale donnée* Δ.

Soient x', y', z', les coordonnées d'un des points du lieu ; on a pour la normale, en ce point,

$$\frac{a^2(x-x')}{x'} = \frac{b^2(y-y')}{y'} = \frac{c^2(z-z')}{z'} = a^2b^2c^2\lambda$$

et, pour Δ,

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha} = \frac{b^2(y-\beta)}{\beta} = \frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma} = a^2b^2c^2\mu.$$

On en déduit deux relations entre λ et μ, et l'on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{x'-\alpha}{b^2c^2} & \frac{y'-\beta}{a^2c^2} & \frac{z'-\gamma}{a^2b^2} \\ x' & y' & z' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant les deux dernières lignes et en transportant les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point donné α, β, γ, on a finalement

$$\gamma XY(a^2-b^2) + \alpha YZ(b^2-c^2) + \beta ZX(c^2-a^2) = 0.$$

6. — *On donne un cylindre de révolution à axe vertical et on le coupe par un plan perpendiculaire au plan vertical. On développe le cylindre sur un plan ; équation du développement de la courbe d'intersection.*

On sait que cette courbe est une *sinusoïde*. En désignant par R le rayon du cylindre, par α l'angle d'inclinaison du plan donné sur la base du cylindre, on trouve

$$y = \operatorname{tg} \alpha \,.\, R \,.\, \sin \frac{x}{R}.$$

7. — *Équation générale des coniques dont on donne une directrice, un point et la différence des axes.*

On peut pour répondre à cette question, former l'équation dont les racines sont les longueurs des axes; on peut aussi, et peut-être plus simplement, remarquer qu'en partant de l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\left(\frac{x}{d} - 1\right)^2;$$

on exprime que la conique considérée passe par l'origine et a, pour directrice, la droite $x = d$; d désignant une longueur donnée. Il reste seulement à trouver une relation entre α et β.

On remarquera, à cet effet, que l'on a, par des propriétés connues,

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{d} \qquad (1)$$

et

$$\frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c} = d - \alpha. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) et l'égalité

$$a - b = h,$$

qui exprime la condition imposée permettent, par élimination des paramètres a et b, de trouver une relation entre les paramètres variables α, β; et les constantes données h et d.

QUESTIONS PROPOSÉES

66. — α, β, γ étant des entiers quelconques, aucune des équations

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 5)x^2 - 2(\alpha\beta + 2\gamma)x + \beta^2 - 2\gamma^2 = 0;$$

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 2)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0,$$

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 8)x^2 - 2(\alpha\beta + 5\gamma)x + \beta^2 - 5\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 13)x^2 - 2(\alpha\beta + 6\gamma)x + \beta^2 - 6\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 10)x^2 - 2(\alpha\beta + 7\gamma)x + \beta^2 - 7\gamma^2 = 0,$$

ne peut admettre de racine entière.

On excepte le cas insignifiant où β et γ étant nuls à la fois, chaque équation admet la racine double $x = 0$.

(S. Realis.)

67. — α, β, γ, δ, étant des entiers quelconques, et β et γ n'étant pas nuls à la fois, l'équation

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta + 3\delta + 1)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0$$

n'a pas de racine entière. *(S. Realis.)*

68. — Une ellipse passe par un point fixe A, et touche une droite donnée en un de ses sommets. Le rapport de l'axe parallèle à la droite à celui qui lui est perpendiculaire est m. Par chaque point du plan passent deux ellipses satisfaisant à ces conditions. Lieu des points tels que les deux ellipses qui y passent soient orthogonales. Dans le cas de $m = 1$, on aura pour lieu un cercle et un cercle-point. Démontrer ce fait par la géométrie élémentaire.

(Amigues.)

69. — Des coniques sont circonscrites à un losange. La bissectrice des diagonales coupe l'une des coniques en deux points A et B. Du point B, on mène la perpendiculaire BH sur la tangente en A. Lieu du point H. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur la tangente en A. — Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe à la polaire d'un point fixe. *(Amigues.)*

70. — On donne en coordonnées rectangulaires un paraboloïde ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

1° Lieu des foyers des sections parallèles à son axe.

2° Lieu des foyers des sections dont les plans sont tangents à un cylindre parallèle à l'axe ; — cas où ce cylindre a pour

équation $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ou bien $$ay^2 = x^2.$$

3° Que doit être ce cylindre pour que la courbe lieu des foyer soit sur un autre cylindre représenté par l'équation

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3y^3 + b^3x^3. \qquad (Amigues)$$

71. — On place n jetons sur les cases d'un échiquier carré de n^2 cases, de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul jeton dans chacune des colonnes ou des lignes de l'échiquier. Démontrer que si l'on désigne par S_n le nombre des solutions symétriques par rapport au centre de l'échiquier on a

$$S_{2n+1} = S^{2n} = 2.4.6 \ldots (2n)$$

Si l'on désigne par u_n le nombre des solutions symétriques par rapport à l'une des diagonales, on a

$$u^n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2};$$

et aussi

$$u^n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6} + \cdots$$

Traiter la même question pour les solutions symétriques par rapport aux deux diagonales.

(*E. Lucas.*)

L'abondance des matières nous force à remettre au numéro prochain la suite de le théorie de l'iuvolution, que nous avons dû retarder au dernier moment.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14492-3.

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

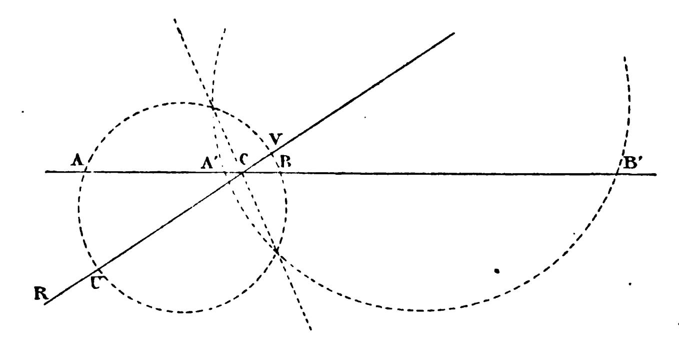
(*Suite*, voir page 121.)

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

La détermination du *centre* dépend, pour toute involution, de la résolution d'une équation linéaire; il est donc possible de remplacer le calcul par une construction géométrique simple; en effet:

Prenez une circonférence, à volonté d'ailleurs, qui passe par les points A et B; prenez ensuite, à volonté, une des circonférences qui passent par A′ et B′; l'axe radical de ces deux circonférences viendra marquer sur la droite fixe le centre demandé C.

Remarque. — Cette construction ne suppose pas la réalité des couples données (A,B) et A′,B′); tous nos lecteurs savent en effet résoudre graphiquement ce problème: mener, par un point P pris à volonté sur un plan, la circonférence qui passe par les deux points imaginaires communs à une droite donnée et à une circonférence donnée.



Le centre C de l'involution étant ainsi déterminé, menez par ce centre une droite à volonté CR; puis prenez sur cette droite le couple (U,V) de telle sorte qu'il vérifie, pour les

grandeurs et les signes, la relation

$$CU \,.\, CV = CA \,.\, CB$$

puis par les points U et V faites passer, en les variant d'une manière continue, toutes les circonférences possibles; chacune de ces circonférences déterminera sur la droite fixe un des couples (M,N) de l'involution; et la suite continue de ces circonférences déterminera tous les segments, soit réels, soit imaginaires, de l'involution.

Première Remarque. — Si les *points doubles* de l'involution sont imaginaires, les points U et V seront de part et d'autre du point C, toutes les circonférences menées par U et V couperont *réellement* la droite fixe, et l'involution n'aura que des segments réels. — Si au contraire l'involution a ses points doubles réels, les points U et V seront d'un même côté du point C; et dans la suite des circonférences passant par U et V, il y en a deux qui touchent la droite fixe; les points de contact sont les points doubles de l'involution.

Deuxième Remarque. — Quand les deux couples donnés, (A,B), (A',B') sont réels, l'inégalité

$$R < o$$

qui produit les points doubles réels, signifie, suivant la manière de dire de Gérard Désargues, que les deux segments donnés (A,B), (A',B') sont ou *dégagés l'un de l'autre*, ou *engagés l'un dans l'autre.*

Troisième Remarque. — Quand on place l'origine au centre de l'involution, la relation involutive devient

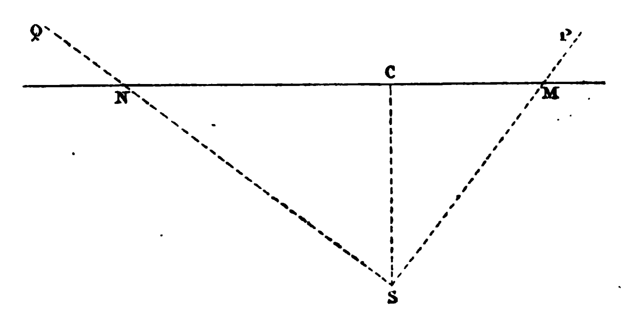
$$uv = \text{constante}$$

et les points doubles sont : *réels*, si la constante est positive; *imaginaires*, si la constante est négative.

Quatrième Remarque. — Il semble donc évident que l'on peut, au point de vue de la discussion des problèmes, et sans compliquer en aucune façon la théorie, distinguer pratiquement : l'involution *à puissance positive*, qui a ses points doubles réels, et l'involution *à puissance négative*, qui a ses points doubles imaginaires; cette distinction, qui résulte de la nature même du problème, se trouve d'ailleurs amplement justifiée par le procédé aussi simple qu'élégant que donne

M. Chasles, pour construire une involution à points doubles imaginaires :

Soit C le centre, et $uv + h^2 = 0$ la relation d'involution



relativement à ce centre; prenez perpendiculairement à la droite fixe

$$CS = h,$$

puis faites pivoter sur le point S un angle droit PSQ; chaque position de l'angle droit déterminera sur la droite fixe X'X un segment (M,N) de l'involution.

Cinquième Remarque. — Dans toute involution, quand l'une des extrémités du segment involutif coïncide avec le *centre*, l'autre extrémité se transporte à l'infini sur la droite fixe.

APPLICATIONS

Théorème. — *Deux involutions distinctes, tracées sur une même droite, ont un segment commun.*

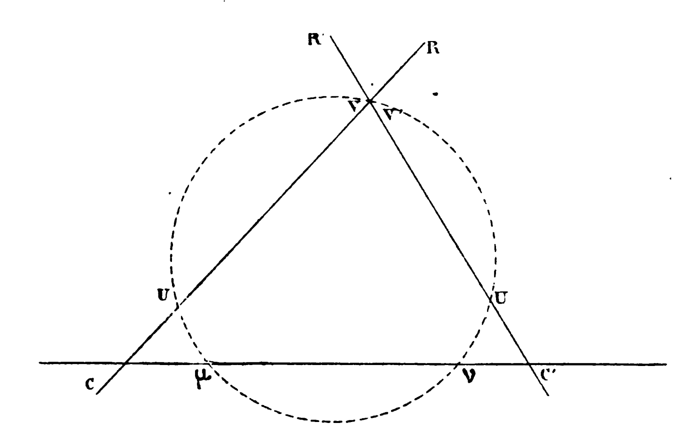
En effet, si
$$Muv + N(u + v) + P = 0$$
$$M'uv + N'(u + v) + P' = 0,$$
le segment commun est défini par les valeurs de uv et de $u + v$ qui vérifient ces deux équations; ce qui donne

$$uv = \frac{NP' - PN'}{MN' - NM'},$$
$$u + v = -\frac{MP' - PM'}{MN' - NM'};$$

donc le segment commun est défini par les racines de l'équation

$$(MN' - NM')\,x^2 + (MP' - PM')x + (NP' - PN') = 0.$$

La construction du segment commun est donc ramenée à construire les racines d'une équation du second degré; on peut en donner plusieurs solutions graphiques, par exemple celle qui suit :



Après avoir fixé le segment extérieur UV d'où l'on déduit, par des circonférences variables, tous les segments de la première involution, on peut choisir U'V' de manière à lui donner une extrémité commune avec UV; d'après cela la circonférence circonscrite au triangle XUU' déterminera sur X'X le segment $\mu\nu$ qui est commun aux deux involutions; ce segment, d'ailleurs, sera tantôt réel, tantôt imaginaire.

Théorème. — *Tout segment d'une involution déterminée divise harmoniquement le segment limité par les deux points doubles.*

Ce théorème résulte immédiatement de cette proposition connue, à savoir : la division harmonique, quand on met l'origine au milieu du segment à diviser, entraîne la relation

$$uv = k^2.$$

Théorème. — *L'involution est projective ;* cela résulte immédiatement du théorème précédent.

Définition. — Deux droites associées, OR, OR', qui pivotent ensemble sur un point fixe O, sont dites se déplacer

en involution, si leurs traces sur une même droite fixe se déplacent en involution ; — il en résulte, en se fondant sur le théorème qui précède immédiatement, que, si l'on prend le pivot O pour origine des coordonnées, les coefficients angulaires des deux droites sont liés par une relation de la forme qui suit

$$g \cdot mm' + h(m + m') + k = 0.$$

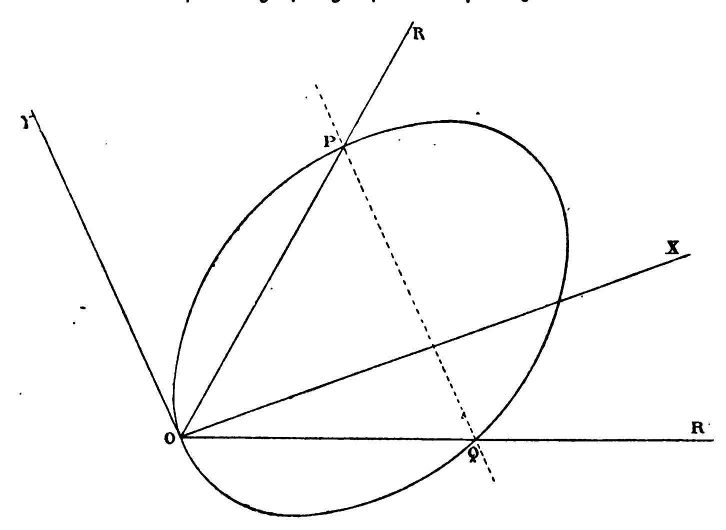
On peut dire aussi que ces deux coefficients angulaires sont les racines variables d'une équation du second degré ayant la forme :

$$A\mu^2 + B\mu + C + \lambda(A'\mu^2 + B'\mu + C') = 0.$$

Théorème. — *Quand deux droites, mobiles ensemble autour d'un point* O, *se déplacent en involution, si le point* O *appartient à une conique, la droite* PQ, *joignant les intersections des deux droites avec la conique, pivote sur un point fixe.*

En effet soit l'origine des coordonnées au pivot O ; l'équation de la conique sera

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0 ;$$



et si nous désignons par

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite PQ, le système des droites OR, OR',
aura pour équation

$$w(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 2(Dx + Ey)(ux + vy) = 0$$

ou bien

$$0 = (Aw - 2Du)x^2 + 2(Bw - Eu - Dv)xy + (Cw - 2Ev)y^2$$

alors $$m + m' = \frac{Eu + Dv - Bw}{Cw - 2Ev}.$$

et $$mm' = \frac{Aw - 2Du}{Cw - 2Ev};$$

il s'ensuit que la condition d'involution devient

$$g(Aw - 2Du) + h(Eu + Dv - Bw) + k(Cw - 2Ev) = 0$$

ou bien

$$(Eh - 2Dg)u + (Dh - 2Ek)v + (Ag + Ck - Bh)w = 0;$$

or cette relation est linéaire et homogène entre u, v, w; donc le théorème est démontré.

Dans le cas particulier où l'on a

$$h = 0, \ g = h,$$

ce théorème devient le théorème si connu de Frégier.

Remarque. — La relation involutive

$$g \cdot mm' + h(m + m') + k = 0$$

se rencontre, en particulier, pour les couples de diamètres conjugués d'une même conique; donc le théorème précédent est applicable à tous les systèmes de diamètres conjugués d'une conique, quand on leur mène des parallèles par un point fixe O d'une conique prise à volonté.

(A suivre.)

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Édouard Lucas.**

La méthode de résolution de l'équation du troisième degré dont il est question dans les deux numéros de mai et juin paraît due à Twining, qui l'a publiée en 1825 dans l'*American Journal of Sciences and Arts* (p. 86); elle date donc de plus d'un demi-siècle. Elle a été exposée aussi, d'une manière

bien différente et fort remarquable par M. Hermite dans la théorie des formes cubiques binaires. Nous donnerons d'abord la méthode de l'auteur américain; nous montrerons ensuite comment l'on peut passer de la méthode de Twining à celle de M. Hermite par l'emploi des formules d'Euler sur les formes homogènes; nous indiquerons rapidement la méthode de M. Hermite et les applications que l'on en peut faire.

I. — **Méthode de Twining**. — Soit

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \qquad (1)$$

l'équation donnée; posons $x = z + \lambda$, l'équation prend la forme

$$az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D = 0, \qquad (2)$$

dans laquelle B,C,D sont des fonctions de λ. Déterminons λ par la condition $BD = C^2$, l'équation (2) devient, en remplaçant D par $C^2 : B$ et en multipliant par BC,

$$aBCz^3 + 3B^2Cz^2 + 3BC^2z + C^3 = 0$$

ou encore

$$(Bz + C)^3 - (B^3 - aBC)z^3 = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant par j une racine cubique de l'unité,

$$Bz + C = jz\sqrt[3]{B^3 - aBC}. \qquad (3)$$

Quant à l'équation $BD = C^2$, elle donne après tous calculs faits

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda + bd - c^2 = 0; \qquad (4)$$

c'est la *réduite* du second degré qui détermine λ; on tire ensuite z par l'équation (3), et finalement x par $z + \lambda$.

Telle est la méthode de l'auteur, qui fait observer qu'elle ne s'applique pas lorsque l'équation proposée à une racine double.

II. — Laissant de côté la discussion de l'équation, nous allons montrer comment on arrive à la méthode de M. Hermite.

On a, par le théorème de Taylor,

$$B = \frac{1}{6} f''(\lambda), \; C = \frac{1}{3} f'(\lambda), \; D = f(\lambda);$$

remplaçons λ par $\lambda : \mu$, et soit

$$f(\lambda,\mu) \equiv a\lambda^3 + 3b\lambda^2\mu + 3c\lambda\mu^2 + d\mu^3,$$

l'équation réduite $BD = C^2$ s'écrit :

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\lambda} \cdot f - \frac{1}{9} (f'_{\lambda})^2 = 0. \tag{5}$$

Mais on a, par le théorème d'Euler,

$$2f'_{\lambda} = \lambda f''_{\lambda\lambda} + \mu f''_{\lambda\mu},$$

$$6f = \lambda^2 f''_{\lambda\lambda} + 2\lambda\mu f''_{\lambda\mu} + \mu^2 f''_{\mu\mu}$$

et, en remplaçant dans l'équation (5), il vient après avoir divisé par μ^2,

$$f''_{\lambda\lambda} f''_{\mu\mu} - (f''_{\lambda\mu})^2 = 0.$$

Ainsi la *réduite* (4) s'obtient en annulant le hessien de la forme cubique. Ce résultat se vérifie directement, puisque l'on a

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\lambda} = a\lambda + b\mu,$$

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\mu} = b\lambda + c\mu,$$

$$\frac{1}{6} f''_{\lambda\mu} = c\lambda + d\mu.$$

III. — Théorème de M. Hermite. — *Toute forme cubique à deux variables est la somme des cubes de deux fonctions linéaires que l'on obtient par la décomposition, en facteurs, du hessien de la forme proposée.*

En effet, soit

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta y)^3 + (\alpha' x + \beta' y)^3,$$

et désignons pour abréger $\alpha x + \beta y$ par u et $\alpha' x + \beta' y$ par v, on a

$$\frac{1}{3} f'_x = \alpha u^2 + \alpha' u^2, \qquad \frac{1}{6} f''_{xx} = \alpha^2 u + \alpha'^2 v,$$

$$\frac{1}{3} f'_y = \beta u^2 + \beta' u^2; \qquad \frac{1}{6} f''_{yy} = \beta^2 u + \beta'^2 v,$$

$$\frac{1}{6} f''_{xy} = \alpha\beta u + \alpha'\beta' v;$$

enfin

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 36(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 uv.$$

Ainsi u et v sont proportionnels aux facteurs linéaires du hessien. C. Q. F. D.

Ce théorème a été étendu par M. Sylvester aux formes de degré impair. *(Théorie des formes canoniques.)*

IV. — Application à l'équation privée du second terme. — Soit l'équation

$$x^3 + 3pxy^2 + 2qy^3 = 0,$$

dans laquelle l'inconnue est $x : y$. On a

$$\frac{1}{6} f''_{x^2} = x, \quad \frac{1}{6} f''_{xy} = px + 2qy, \quad \frac{1}{6} f''_{y^2} = py;$$

et
$$\frac{H}{36} = x(px + 2qy) - p^2y^2.$$

Si l'on décompose en facteurs le trinôme

$$px^2 + 2qxy - p^2y^2,$$

on a en posant $R = \sqrt{q^2 + p^3}$

$$u = px + y(q - R), \quad v = px + y(q + R),$$

et l'on remplacera l'équation proposée par

$$m[px + y(q - R)]^3 + n[px + y(q + R)] = 0;$$

on détermine le rapport $m : n$ en annulant le coefficient de x^2y, ce qui donne

$$m(q - R) + n(q + R) = 0;$$

donc l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{u^3}{q - R} - \frac{v^3}{q + R} = 0;$$

et l'on a
$$\frac{px + y(q - R)}{px + y(q + R)} = -j\sqrt[3]{\frac{R - q}{R + q}}.$$

On retrouve facilement la formule de Cardan en posant

$y = 1, \qquad R - q = M^3, \quad R + q = -N^3,$

et choisissant M et N de telle sorte que $MN = -p$.

V. — Application à la physique. — La méthode précédente est de beaucoup préférable à la méthode de Hudde. En effet, il arrive souvent dans les questions de physique que les équations du troisième degré auxquelles conduisent certains problèmes se présentent sous la forme canonique $u^3 \pm v^3 = 0$. Ainsi, par exemple, dans ce problème d'aérostatique :

Connaissant l'épaisseur ε d'un ballon de densité D *contenant*

un fluide de densité δ, et plongé dans un fluide de densité Δ, déterminer le rayon intérieur x du ballon pour qu'il y ait équilibre.

L'explication du principe d'Archimède donne

$$x^3\delta + [(x+\varepsilon)^3 - x^3]\,D = (x+\varepsilon)^3\Delta$$

ou bien $\quad x^3(D - \delta) = (x+\varepsilon)^3\,(D - \Delta),$

et finalement $\quad \dfrac{x+\varepsilon}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{D-\delta}{D-\Delta}}$

VI. — Problème. — La forme canonique du polynôme général du troisième degré permet d'étudier plus facilement les propriétés de ces polynômes. On peut ainsi appliquer le théorème de M. Hermite au problème suivant qui a été donné au concours général, il y a quelques années :

Soit l'équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0;$$

on pose $\quad y = mx^2 + 2nx + p,$

et l'on demande de déterminer les coefficients m, n, p de telle sorte que l'équation en y obtenue en éliminant x entre les deux précédentes admette les mêmes racines que l'équation proposée.

Ce problème est assez difficile à traiter directement; on commence à résoudre la question sur l'équation

$$z^3 + 1 = 0,$$

et l'on applique ensuite les théories précédentes. Nous laissons au lecteur le soin de développer les calculs.

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Édouard Lucas.**

Le même auteur Twining a donné une méthode de résolution de l'équation du quatrième degré que nous exposerons encore.

Soit l'équation

$$x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

séparons les termes de degré impair

$$4bx^3 + 4dx = - x^4 - 6cx^2 - e;$$

multiplions par l'indéterminée λ et ajoutons x^4 aux deux membres

$$x^4 + 4b\lambda x^3 + 4d\lambda x = (1 - \lambda) x^4 - 6c\lambda x^2 - e\lambda,$$

ou bien

$$\left(x^2 + 2b\lambda x + \frac{d}{b}\right)^2 = x^4 (1 - \lambda) + 2x^2 (2b^2\lambda^2 + \frac{d}{b} - 3c\lambda) + \frac{d^2}{b^2} - e\lambda.$$

Exprimons que le second membre est un carré parfait, on obtient une équation du quatrième degré en λ, privée de terme tout connu. Divisons par λ et posons

$$\lambda = \frac{z}{2b^2},$$

on a la *réduite*

$$z^3 - 6cz^2 + z(4bd + 9c^2 - e) + 2(d^2 + b^2e - 6bcd) = 0,$$

et l'équation proposée devient, avec $\varepsilon = \pm 1$,

$$bx^2 + zx + d = \varepsilon x^2 \sqrt{a^2 - \frac{z}{2}} + \varepsilon \sqrt{d^2 - \frac{ez}{2}}.$$

Il y aurait lieu de développer cette méthode, de la discuter, d'exprimer z en fonction des racines de la proposée, et de montrer comment on peut la déduire de l'équation aux sommes des racines de la réduite de Ferrari.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Questions d'examen (1883)

(*Suite*, voir page 163).

8. — *On propose de construire la courbe*

$$y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^4 - 1} \qquad (1)$$

Nous supposons d'abord que les radicaux soient pris avec leurs signes explicites; y est alors une fonction bien déterminée et l'on peut étudier sa variation quand x varie de 1 à $+\infty$. Mais ici se présente une difficulté.

Lorsque x varie de 1 à $+\infty$ il est incontestable que y a une valeur réelle; si, au contraire, x varie de -1 à $+1$ les deux expressions $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{x^4-1}$ sont l'une et l'autre imaginaires. Est-on certain que la différence de ces expressions est aussi une expression imaginaire? Ne pourraient-elles pas être de la forme $\alpha + \beta i, \alpha' + \beta i$? On peut donc se poser cette question : *Chercher si* y *admet des solutions réelles, quand* x *varie de* -1 à $+1$.

A cet effet on peut écrire l'équation sous la forme

$$(y - \sqrt{x^2-1})^4 = x^4 - 1$$

ou

$$y^4 + 6y^2(x^2-1) + (x^2-1)^2 - x^4 + 1$$
$$= 4y\sqrt{x^2-1}(x^2+y^2-1) \qquad (2)$$

Si l'équation (1) admettait une solution en nombres réels, x', y'; x' étant inférieur à l'unité; cette même solution vérifierait l'équation (2). On voit que cette hypothèse est généralement inadmissible, parce que, d'après l'équation (2), $\sqrt{x'^2-1}$ serait une quantité réelle.

Mais la conclusion précédente est inexacte dans le cas particulier où la solution considérée x', y' vérifie l'équation $x^2+y^2-1=0$ et nous allons montrer qu'il existe quatre points doubles isolés dans la région du plan comprise entre les droites $x = \pm 1$, points situés sur le cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \qquad (3)$$

En effet, cherchons l'intersection de la courbe donnée avec ce cercle. L'équation (2), en tenant compte de (3), devient $\quad y^4 - 6y^4 + y^4 - (1-y^2)^2 + 1 = 0$

ou $\quad y^2(5y^2-2) = 0.$

L'hypothèse $y = 0$ donne les points A, α situés sur ox; mais en prenant $y^2 = \frac{2}{5}$, on a quatre points doubles isolés, points dont les coordonnées sont

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Ce résultat peut être obtenu autrement.

Posons

(A) $\qquad \sqrt{x^2-1} = \beta i, \qquad \sqrt{x^4-1} = \beta' i \qquad$ (B)

et aussi $\qquad \sqrt[4]{x^4-1} = \sqrt{\beta' i} = \alpha + \beta i \qquad$ (C)

Dans les égalités (A) et (C) nous avons, à dessein, donné à i le même coefficient β.

On a d'abord $\beta' i = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i,$

par conséquent

$$\beta' = 2\alpha\beta \text{ et } \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

En prenant $\alpha = \beta$, on a $\beta' = 2\beta^2$. (D)

D'autre part les égalités (A) et (B) donnent

$$x^2 - 1 = -\beta^2$$
$$x^4 - 1 = -\beta'^2,$$

et, par suite $\beta^4 + \beta'^2 - 2\beta^2 = 0.$ (D')

Les égalités (D) et (D') conduisent à la relation suivante

$$\beta^2(5\beta^2 - 2) = 0$$

et comme β n'est pas nul, on a, finalement,

$$\beta^2 = \frac{2}{5}.$$

De cette valeur de β on déduit, comme tout à l'heure

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

et

$$y^2 = \frac{2}{5}.$$

On peut, d'ailleurs, vérifier que l'on a bien

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{-\frac{2}{5} - \sqrt[4]{-\frac{16}{25}}},$$

les radicaux étant pris avec les signes explicites. Cette égalité revient en effet à celle-ci :

$$\sqrt{2} = \sqrt{-2 - \sqrt[4]{-16}},$$

dont la vérification est évidente.

Le point délicat que nous venons d'examiner se présente dans un grand nombre de courbes, par exemple dans la suivante $y = x\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - x^3}$ qui a été également proposée et sur laquelle on pourra répéter l'un ou l'autre des raisonnements qui précèdent.

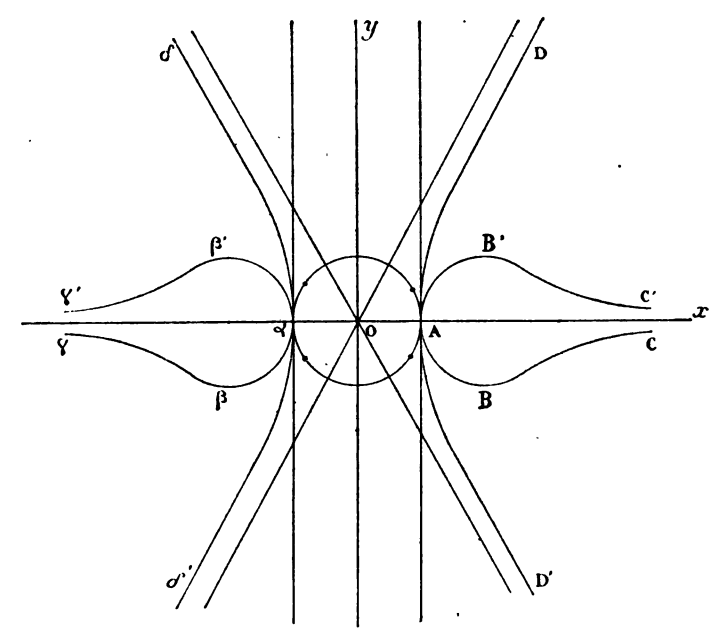
Revenons maintenant à la courbe (1). On reconnaît que l'équation (1) donne un bras de courbe ABC, quand x varie de 1 à $+\infty$; et le bras symétrique $\alpha\beta\gamma$, quand x varie de -1 à $-\infty$.

L'équation dérivée admet une racine entre 1 et 2 et elle n'a pas d'autre racine réelle; enfin pour $x = \infty$, en changeant x en $\frac{1}{x}$ on voit facilement que la limite de y est égale à zéro.

En prenant l'équation

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}$$

on a un bras de courbe AD et son symétrique $\alpha\delta$. Ils admettent pour asymptotes, respectivement, les droites $y = 2x$,



$y = -2x$ et la courbe, quand on donne aux radicaux successivement les signes + et —, a la forme générale indiquée par la figure.

9. — *Décomposer la fraction irréductible* $\frac{A}{a^\alpha b^\beta}$ *en fractions de la forme* $\frac{m}{a^h}$, *et* $\frac{n}{b^{h'}}$. *On suppose que* a *et* b *sont des nombres premiers et que l'on a*

$$0 < m < a, \quad -b < n < b, \quad h \leq \alpha, \quad h' \leq \beta.$$

Nous allons montrer que l'on peut toujours établir l'égalité

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = P + \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{m_2}{a^{\alpha-1}} + \dots + \frac{m_\alpha}{a} + \frac{n_1}{b^\beta} + \dots + \frac{n_\beta}{b}$$

P; $m_1, \dots m_\alpha$; $n_1, \dots n_\beta$ étant des nombres entiers.

On a en effet

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x}{a^\alpha} + \left[\frac{A}{a^\alpha b^\beta} - \frac{x}{a^\alpha}\right]$$

ou

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x}{a^\alpha} + \frac{A - xb^\beta}{a^\alpha b^\beta} \qquad (1)$$

Disposons maintenant de x de façon à vérifier l'égalité

$$A = xb^\beta + ay.$$

C'est une équation indéterminée du premier degré, et comme a et b^β sont premiers entre eux, on sait qu'il existe une infinité de valeurs *entières* d'x et d'y représentant une solution de cette équation. Soit x' y' cette solution, choisie de telle façon que l'on ait $x' > 0$; cette condition peut toujours être vérifiée; on sait pourquoi.

On a donc $A = x'b^\beta + ay'$

et l'égalité (1) devient

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{x'}{a^\alpha} + \frac{y'}{a^{\alpha-1}b^\beta}, \qquad (2)$$

Nous avons dit que x' était un nombre positif; s'il est plus petit que a, la première fraction est obtenue; sinon on divisera x' par a et l'on aura

$$x' = aq + m_1 \quad (m_1 < a),$$

L'égalité (2) devient alors

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{y'}{a^{\alpha-1}b^\beta}$$

ou, finalement,

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{A_1}{a^{\alpha-1}b^\beta}\ ; \qquad (3)$$

égalité dans laquelle m_1 désigne un nombre entier positif et inférieur à a.

On peut toujours supposer que $\frac{A}{a^\alpha b^\beta}$ est une fraction proprement dite; s'il n'en était pas ainsi, on effectuerait la

division et l'on obtiendrait la partie entière que nous avons désignée par P.

Ainsi l'égalité (3) permet de mettre la fraction $\frac{A}{a^\alpha b^\beta}$ sous la forme arithmétique $\frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{A_1}{a^{\alpha-1} b^\beta}$, A étant positif ou négatif. En appliquant successivement cette propriété on obtient l'égalité suivante

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = \frac{m_1}{a^\alpha} \pm \frac{m_2}{a^{\alpha-1}} + \ldots \pm \frac{m\alpha}{a} \pm \frac{B}{b^\beta}.$$

Si B est plus grand que b, pour décomposer la fraction $\frac{B}{b^\beta}$, on divisera d'abord B par b, ce qui donne

$$B = bq_1 + n_1$$

et par suite
$$\frac{B}{b^\beta} = \frac{n_1}{b^\beta} + \frac{q_1}{b^{\beta-1}}.$$

Si l'on a $q_1 < b$ le développement est effectué ; sinon, on divise q_1 par b et, en poursuivant ces calculs bien connus, on déterminera successivement les coefficients n.

10. — *Démontrer que la décomposition précédente n'est possible que d'une seule façon lorsque les coefficients* m *et* n *sont positifs.*

Admettons que l'on ait trouvé par deux procédés différents

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = P + \frac{m_1}{a^\alpha} + \frac{m_2}{\alpha -} + \ldots + \frac{n_1}{b\beta} + \frac{n_2}{b^{\beta-1}} + \ldots$$

et

$$\frac{A}{a^\alpha b^\beta} = Q + \frac{r_1}{a_\alpha} + \frac{r_2}{a} + \ldots + \frac{s_1}{b^\beta} + \frac{s_2}{b^{\beta-1}} + \ldots$$

Les coefficients m, r étant positifs et inférieurs à a, et les coefficients n et s, positifs et inférieurs à b, nous allons montrer que ces coefficients sont égaux, deux à deux.

En effet, considérons l'égalité

$$P + \frac{m_1}{a} + \ldots + \frac{n_1}{b} + \ldots = Q + \frac{r_1}{a} + \ldots + \frac{S_1}{b} + \ldots$$

et multiplions les deux membres par $a^{\alpha-1}b$:

on a $$\frac{(m_1 - r_1)b^\beta}{a} = N,$$

N désignant un nombre entier que l'on peut supposer positif; a étant premier avec b , cette égalité exigerait que $m_1 - r_1$ fût divisible par a. Cette hypothèse n'est pas admissible, les nombres m_1 et r_1 étant, l'un et l'autre, *positifs* et inférieurs à a.

Ainsi l'on a $m_1 = r_1$. Ce point étant établi, on voit comment, de proche en proche, on vérifie l'identité des deux développements.

11. — *Surface du triangle sphérique dans une sphère de rayon* R.

En désignant par S la surface du triangle et par A, B, C les angles, on sait comment on est conduit à l'égalité

$$2S + 2\pi R^2 = \text{fus A} + \text{fus B} + \text{fus C}$$

D'ailleurs $$\text{fus H} = 2\pi R^2 \left(\frac{H}{180}\right)$$

on a donc $$S = \pi R^2 \left(\frac{A + B + C}{180} - 1\right).$$

C'est la formule demandée, formule dans laquelle A, B, C désignent les angles du triangle exprimés en degrés. Cette formule est employée en géodésie, avec cette différence légère que le rapport $\frac{A + B + C}{180}$ est exprimé en secondes; l'excès sphérique des triangles considérés à la surface de la terre étant toujours assez petit.

12. — *Équation d'un paraboloïde de révolution qui a pour trace l'ellipse* $z = 0$, $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

On peut partir de l'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$$

pour exprimer : 1° que la surface est de révolution ; 2° que cette surface est un paraboloïde.

En posant comme toujours

$$a^2 - b^2 = c^2$$

on trouve

$$(x, y, z) = b^2x^2 + a^2y^2 + c^2z^2 \pm 2bczx + \delta z - a^2b^2 = 0.$$

Il est facile de vérifier: 1° que c'est un paraboloïde elliptique, parce que l'on a

$$f(x,y,z) = a^2y^2 + (bx \pm cz)^2 + (\delta z - a^2b^2) = 0,$$

équation d'un paraboloïde elliptique, sauf pour $\delta = 0$;

2° que cette surface est de révolution, parce que son équation peut s'écrire

$$a^2(x^2 + y^2 + z^2) + \delta z - a^2b^2 - (cx \pm bz)^2 = 0.$$

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES, CAS D'UNE RACINE IMAGINAIRE MULTIPLE

On sait que si $f(x) = (x^2 + px + q)^n\varphi(x)$ on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

En supposant F et f premiers entre eux, φ premier avec $x^2 + px + q$, puis désignant par $Q(x)$ un quotient entier, $P(x)$ un polynôme de degré inférieur à $2n$ et premier avec $x^2 + px + q$;

Si l'on divise $P(x)$ par $x^2 + px + q - z$, z étant une constante arbitraire il vient

$$P(x) = (x^2 + px + q - z)\, S(x) + \alpha x + \beta$$

$S(x)$ désignant le quotient, polynôme entier en x et en z, $\alpha x + \beta$ le reste où α et β sont des fonctions entières de z du degré $n - 1$ au plus. Ce point se constate en remarquant que dans la division z apparaîtra au premier degré dans le troisième coefficient du quotient et au deuxième degré dans le reste, puis au deuxième degré dans le cinquième terme du quotient avec reste du troisième degré en z, etc.

L'égalité ci-dessus a lieu pour autant de valeurs distinctes de z qu'on voudra, donc c'est une identité et l'on y peut faire $z = x^2 + px + q$. Mais nous avons

$$\alpha x + \beta = \alpha_n x + \beta_n + (\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1})z + \ldots + (\alpha_1 x + \beta_1)z^{n-1}$$

et il est visible que α_n, β_n ne peuvent être nuls à la fois; sinon $\alpha x + \beta$ s'annulant pour $z = 0$, $P(x)$ serait divisible par $x^2 + px + q$ contre l'hypothèse. Ainsi on a enfin, quel que soit x :

$$P(x) = \alpha_n x + \beta_n + (\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1})(x^2 + px + q) + \ldots + (\alpha_1 x + \beta_1)(x^2 + px + q)^{n-1}.$$

Par suite pour la fraction correspondante :

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{\alpha_n x + \beta_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\alpha_{n-1}x + \beta_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 + px + q}.$$

C'est la forme de développement qu'il s'agissait d'obtenir.

QUESTION 4

Solution par M. Kœhler.

Une corde PQ *d'une ellipse est normale en* P; *trouver le minimum de cette corde, et démontrer que, si* PQ *est minimum, le centre du cercle osculateur en* P *est le point* Q. O *étant le pôle de* PQ, *montrer que, si* OP *est minimum, le pôle sera situé sur la seconde tangente commune à l'ellipse et au cercle osculateur en* P.

La normale PQ au point P de l'ellipse a pour expression $N^2 = \dfrac{4a^2b^2(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^3}{(a^4\sin^2\omega + b^4\cos^2\omega)^2}$, en appelant ω l'angle excentrique pour le point P. En dérivant par rapport à ω on trouve l'équation

$$\operatorname{tg}^2\omega\,(a^4 - 2a^2b^2) + b^4 - 2a^2b^2 = 0,$$

et par suite $N = \dfrac{3\sqrt{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$. C'est précisément la valeur du rayon de courbure au point P, qui est $R = \dfrac{(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

La distance du point P au pôle O de la normale est donnée par la formule facile à établir

$$c^4 . \overline{OP}^2 = \frac{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{\sin^2 \omega \cos^2 \omega}.$$

Pour trouver le minimum on a l'équation

$$a^2 \text{tg} \omega + 2c^2 \text{tg}^2 \omega - b^2 = 0.$$

Cela posé, on trouve pour le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse au point Q la valeur

$$-\frac{b \cos \omega}{a \sin \omega} \frac{(c^4 \sin^2 \omega - b^4)}{(c^4 \cos^2 \omega - a^4)}.$$

Soient (x', y') les coordonnées du pôle O, savoir $x' = \frac{a^2}{c^2 \cos \omega}$, $y' = -\frac{b^2}{c^2 \sin \omega}$; soient (α, β) celles du centre de courbure C, savoir $\alpha = \frac{c^2}{a} \cos^3 \omega$, $\beta = \frac{c^2}{b} \sin^3 \omega$.

Les coefficients angulaires des tangentes au cercle issues du point O se trouveront en exprimant que la droite $y - y' - m(x - x') = 0$ est distante du centre C de la longueur $R = \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$. On doit avoir

$$[\beta - y' - m(\alpha - x')]^2 = R^2 (1 + m^2),$$

ou en développant

$$m^2 \left[\left(\frac{c^2 \cos^3 \omega}{a} - \frac{a^2}{c^2 \cos \omega}\right)^2 - \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{a^2 b^2}\right]$$

$$- 2m \left(\frac{c^2 \cos^3 \omega}{a} - \frac{a^3}{c^2 \cos \omega}\right) \left(\frac{b^3}{c^2 \sin \omega} - \frac{c^2 \sin^3 \omega}{b}\right)$$

$$+ \left(\frac{b^3}{c^2 \sin \omega} - \frac{c^2 \sin^3 \omega}{b}\right)^2 - \frac{(a^2 \sin^2 \omega - b^2 \cos^2 \omega)}{a^2 b^2} = 0.$$

Le produit des deux valeurs de m est

$$\frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} \left[\frac{a^2 (c^4 \sin^4 \omega - b^4)^2 - c^4 \sin^2 \omega (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}{b^2 (c^4 \cos^4 \omega - a^4)^2 - c^4 \cos^2 \omega (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^3}\right]$$

et comme l'une d'elles doit être le coefficient angulaire de la tangente OP, c'est-à-dire $-\frac{a \sin \omega}{b \cos \omega}$, on trouve pour le

coefficient de la seconde tangente

$$m'' = -\frac{a\cos\omega}{b\sin\omega}\left[\frac{a^2(c^4\sin^4\omega - b^4)^2 - \ldots}{b^2(c^4\cos^4\omega - a^4)^2 - \ldots}\right]$$

Exprimons maintenant que m' est égal au coefficient de la tangente à l'ellipse en Q; nous aurons les conditions pour que la tangente commune passe par le pôle de la normale. On trouve

$$a^4(c^4\cos^2\omega - a^4)(c^4\sin^4\omega - b^4)^2 - b^4(c^4\sin^2\omega - b^4)(c^4\cos^4\omega - a^4)^2$$
$$= c^4(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^3$$
$$\times\left[a^2\sin^2\omega(c^4\cos^2\omega - a^4) - b^2\cos^2\omega(c^4\sin^2\omega - b^4)\right]$$

Mais on a

$$c^4\sin^4\omega - b^4 = (c^2\sin^2\omega - b^2)(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)$$
$$c^4\cos^4\omega - a^4 = (c^2\cos^2\omega + a^2)(-a^2\sin^2\omega - b^2\cos^2\omega)$$

On peut donc diviser les deux membres de l'équation précédente par $(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^2$, et il reste

$$a^4(c^4\cos^2\omega - a^4)(c^2\sin^2\omega - b^2)^2$$
$$- b^4(c^4\sin^2\omega - b^4)(c^2\cos^2\omega + a^2)$$
$$= c^4(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)(c^6\cos^2\omega\sin^2\omega + b^6\cos^2\omega$$
$$- a^6\sin^2\omega)$$

ou, en conservant seulement les puissances de $\sin\omega$:

$$-c^8(a^4 + b^4)\sin^6\omega + 3b^4c^8\sin^4\omega - b^4c^4\sin^2\omega(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)$$
$$- c^4b^6(2a^2 - b^2)$$
$$= c^4(c^2\sin^2\omega + b^2)\left[b^6 + (c^6 - b^6 - a^6)\sin^2\omega - c^6\sin^4\omega\right]$$

On peut encore diviser les deux membres par $c^2\sin^2\omega + b^2$, et il vient,

$$-c^2(a^4 + b^4)\sin^4\omega + b^2(a^4 + b^4 + 3b^2c^2)\sin^2\omega$$
$$- b^4(2a^2 - b^2)$$
$$= -c^6\sin^4\omega + \sin^2\omega(c^6 - b^6 - a^6) + b^6$$

ou enfin $\quad c^2\sin^4\omega - 2a^2\sin^2\omega + b^2 = 0.$

Passant du sinus à la tangente, on retrouve l'équation $a^2\mathrm{tg}^4\omega + 2c^2\,\mathrm{tg}^2\omega - b^2 = 0$, qui doit avoir lieu pour que OP soit minimum.

QUESTION 6

Solution par M. H. Ferval, élève au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

Si dans une équation, A, B, C, D *désignent quatre coefficients consécutifs positifs, ou tels tout au moins que* AC *soit positif ; si l'on a* BC = AD, *l'équation proposée a des racines imaginaires.*

Si l'on multiplie le premier membre de l'équation considérée par $Bx - C$; dans l'équation obtenue n'existera pas la puissance de x, dont B était le coefficient, et les coefficients des termes qui limiteront la lacune seront

$$B^2 - AC \text{ et } BD - C^2.$$

Or, en vertu de la relation BC = AD, l'expression $B^2 - AC$ peut s'écrire $\frac{BAD}{C} - AC$ ou $\frac{A}{C}(BD - C^2)$;

AC étant > o, par hypothèse, la nouvelle équation présente une lacune d'un terme entre deux termes de même signe ; elle a donc, ainsi que la proposée, au moins deux racines imaginaires.

QUESTION 47

Solution par M. H. Ferval, élève au Lycée Henri IV.

Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont :

$$A,\ B,\ C,\ 2B - A,\ 2C - B,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Désignons par a_p, a_{p-1} ... a_{p-4}, les cinq coefficients A,B,C, 2B — A, 2C — B, de l'équation considérée ; ces cinq coefficients satisfont aux deux relations :

$$a \; - 2a_{p-1} + a_{p-3} = o$$
$$a_{p-1} - 2a_{p-2} + a_{p-4} = o.$$

En multipliant le premier membre de l'équation par l'expression
$$1 - 2x + x^3,$$
qui, égalée à zéro, n'admet que des racines réelles, on obtient une équation présentant une lacune de deux termes, les puissances de x dont A et B étaient les coefficients respectifs venant à manquer; l'équation nouvelle et par suite la première ont donc au moins deux racines imaginaires.

QUESTION 48

Solution par M. H. FERVAL, élève au Lycée Henri IV.

Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont :
$$+ 3A \quad - A \quad - A \quad + 3A,$$
l'équation a des racines imaginaires.

En désignant par a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, a_{p-3}, ces quatre coefficients consécutifs, on voit qu'ils satisfont aux deux relations
$$a_p + 2a_{p-1} + a_{p-2} = 0$$
$$a_{p-1} + 2a_{p-2} + a_{p-3} = 0.$$

Si l'on multiplie le premier membre de l'équation par $1 + 2x + x^2$ ou $(1 + x)^2$, on fait disparaître les puissances de x qui avaient pour coefficients respectifs a_p et a_{p-1}; l'équation obtenue, ainsi que l'équation considérée, aura donc au moins deux racines imaginaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

---

72. — On donne une parabole P, rapportée à ses axes ordinaires; par le pied de la directrice, on mène une transversale qui rencontre P en deux points A, B; soit C le cercle qui passe par ces points et par le foyer de P.

Lieu des centres des cercles C. Ce lieu est une parabole cubique.

Enveloppe des polaires de l'origine. Cette courbe est une cubique unicursale.

Enveloppe des cercles C; on trouvera une quartique à point triple.

Par le pied de la directrice on mène deux droites rectangulaires Δ' et Δ''; soient C' et C'' les cercles correspondants; trouver le lieu des points communs à C' et C''; ce lieu est une quartique passant doublement par les ombilics du plan.

(G. L.)

73. — On considère un triangle ABC, inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe. Trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle. *(G. L.)*

74. — On décrit une conique osculatrice à une conique donnée en un point P, et passant par les foyers F et F'. Démontrer que les tangentes en F et F' se coupent au centre du cercle osculateur en P. *(Kœhler.)*

75. — Le nombre

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

est la somme de deux carrés entiers. *(Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16506-3.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps**.

L'objet de ce mémoire est le développement en fractions continues, d'un nouveau genre, des quantités irrationnelles de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$, α et β désignant des nombres entiers. Nous nous appuierons à plusieurs reprises, dans ce travail, sur un théorème de Lagrange; mais nous devons entrer, d'abord dans quelques détails sur ce théorème fondamental de l'analyse récurrente et nous ferons connaître la démonstration élémentaire que nous en avons donnée autrefois (1).

I. Définition des suites récurrentes. — Lorsqu'une quantité, que nous désignerons par U_n, et dont la valeur dépend du nombre entier et positif n, est liée aux quantités de même espèce $U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots U_{n-i}$ par une relation linéaire et homogène

$$U_n + A_1U_{n-1} + \ldots + A_iU_{n-i} = 0,$$

on dit que ces fonctions U forment une *suite récurrente* et la relation précédente constitue la *loi de récurrence* de ces fonctions. Si l'on veut des exemples de nombres récurrents, on peut d'abord citer les termes d'une progression géométrique qui vérifient constamment l'équation

$$U_n - q\,U_{n-1} = 0.$$

Dans les progressions arithmétiques, trois termes consécutifs U_n, U_{n-1}, U_{n-2} vérifient toujours la relation

$$U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2} = 0.$$

Enfin, pour citer un dernier exemple emprunté à la trigonométrie élémentaire, nous rappellerons qu'en posant $U_n = \sin nx$ et $\cos x = \alpha$, on a

$$U_{n+1} - 2\alpha U_n + U_{n-1} = 0.$$

(1) Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Reims, 1880.

Lorsque les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_i$ sont des constantes, on a une *suite récurrente proprement dite;* dans le cas où ces coefficients varient eux-mêmes avec n, on obtient ce qu'on peut nommer, pour les différencier des autres, des *suites récurrentes transcendantes.*

Une fonction U_n vérifiant l'équation de récurrence proposée est dite une *intégrale* de cette équation. Lorsque U_n renferme des *constantes arbitraires* dont le nombre est tel que toute intégrale puisse être représentée par U_n, pour des valeurs convenablement choisies des constantes, on dit que U_n est *l'intégrale générale.*

Les suites récurrentes proprement dites ont été étudiées particulièrement par Lagrange qui a donné sur elles le théorème suivant:

II. Théorème de Lagrange. — *Soit une fonction* U_n, *vérifiant l'égalité*

$$U_n + A_1U_{n-1} + \ldots + A_iU_{n-i} = 0 \qquad (1)$$

et soit

$$z^i + A_1z^{i-1} + \ldots + A_i = 0 \qquad (2)$$

une équation déduite de (1) *d'après une loi évidente.*

Si cette équation que nous nommerons ÉQUATION GÉNÉRATRICE *n'a pas de racines égales, l'intégrale générale de* (1) *est donnée par la formule*

$$U_n = \alpha_1z_1^n + \alpha_2z_2^n + \ldots + \alpha_iz_i^n \qquad (A)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$, *désignant des constantes arbitraires dont la valeur dépend, en général, des données initiales*

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots \quad U_{i-1};$$

et $z_1, z_2, \ldots z_i$ *étant les racines de l'équation génératrice.*

Posons $\quad y = U_0 + U_1x + U_2x^2 + \ldots + U_nx^n \qquad (3)$

et multiplions les deux membres de cette égalité, successivement par $\quad 1, A_1x, A_2x^2, \ldots A_ix^i$.

Si nous ajoutons ces résultats et si nous tenons compte de la relation (1) qui a lieu pour toutes les valeurs entières de n, supérieures à $(i - 1)$, nous voyons disparaître les termes en $x^i, x^{i+1}, \ldots x^n$ et nous obtenons finalement

$$y(1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_ix^i) = \varphi(x) + x^{n+1}\psi(x)$$

$\psi(x)$ et $\varphi(x)$, étant des polynômes entiers du degré $(i - 1)$ tout au plus.

Considérons maintenant la fraction $\frac{\varphi(x)}{1 + A_1 x + \ldots + A_i x^i}$; on a, identiquement, par la décomposition connue d'une fraction rationnelle en fractions simples, à coefficients réels ou imaginaires,

$$\frac{\varphi(x)}{1 + A_1 x + \ldots + A_i x^i} = \frac{\lambda_1}{x - \theta_1} + \frac{\lambda_2}{x - \theta_2} + \ldots + \frac{\lambda_i}{x - \theta_i}$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i$ désignant les i racines de l'équation

$$F(x) = A_i x^i + \ldots + A_1 x + 1 = 0. \qquad (2')$$

On doit observer ici que les racines de (2') sont les inverses des racines de l'équation (2); celles-ci étant supposées distinctes, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i$, sont des nombres différents.

On a donc

$$y = \frac{\lambda_1}{x - \theta_1} + \frac{\lambda_2}{x - \theta_2} + \ldots + \frac{\lambda_i}{x - \theta_i} + x^{n+1}\frac{\psi(x)}{F(x)} \qquad (3')$$

Si nous prenons n fois de suite la dérivée de y, dans les égalités (3) et (3'), nous obtenons en égalant les deux expressions de $y^{(n)}$, et en y faisant $x = 0$,

$$-U_n = \frac{\lambda_1}{\theta_1^{n+1}} + \frac{\lambda_2}{\theta_2^{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_i}{\theta_i^{n+1}}$$

ou encore, en posant

$$-\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\theta_1}, \ -\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\theta_2}, \ldots, \ -\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\theta_i},$$

et en remarquant que l'on a

$$z_1 = \frac{1}{\theta_1}, \ z_2 = \frac{1}{\theta_2}, \ \ldots \ z_i = \frac{1}{\theta_i}$$

$$U_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \ldots + \alpha_i z_i^n.$$

C'est la formule que nous voulions établir, formule dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ désignent i constantes arbitraires; la valeur de ces constantes est déterminée quand on connaît les i premières fonctions U,

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots \quad U_{i-1}.$$

Nous allons développer ce dernier point, dans le paragraphe suivant, et montrer que la formule (A) donne bien l'intégrale générale.

III. Détermination des constantes arbitraires. — Une relation de récurrence entre $(i + 1)$ fonctions U

$$U_n, \; U_{n-1}, \; \ldots \; U_{n-i},$$

permet de calculer U_i, connaissant U_0, U_1 ... U_{i-1}; puis U_{i+1}, etc... Il y a donc i constantes arbitraires qui sont ou les i premières fonctions U, ou des quantités en nombre i, et dépendant de celles-ci. Nous voulons montrer que les constantes arbitraires de la formule (A) sont bien déterminées quand on donne les i premières fonctions U.

En effet, la formule (A) donne

$$U_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i$$
$$U_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_i z_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_{i-1} = \alpha_1 z_1^{i-1} + \alpha_2 z_2^{i-1} + \ldots + \alpha_i z_i^{i-1}$$

Dans ces équations linéaires le déterminant des inconnues est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{i-1} & z_2^{i-1} & \ldots & z_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde, d'ordre i, et l'on sait que ce déterminant est différent de zéro quand lesquantités réelles ou imaginaires z_1, z_2, ... z_i sont différentes hypothèse que nous avons faite.

Ainsi les paramètres α sont bien déterminés quand on donne les i premières fonctions U, et elles sont indéterminées, si une ou plusieurs de ces fonctions sont elles-mêmes indéterminées. Il résulte de cette remarque que la formule (A) donne bien l'intégrale générale, et qu'il n'existe aucune intégrale particulière qui ne puisse être donnée par cette formule quand on donne aux coefficients α des valeurs convenablement choisies.

IV. Théorème de Lagrange dans le cas des racines égales. — Lagrange a examiné le cas particulier où l'équation génératrice admet des racines multiples et a montré la modification profonde que subit, dans cette hypothèse, l'intégrale générale. La démonstration que nous venons de donner du théorème de Lagrange, dans le cas général, subsiste, en principe, quand on suppose que l'équa-

tion génératrice a des racines égales; il faut seulement, comme nous allons le montrer, effectuer la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples, en tenant compte des racines multiples.

Prenons, pour plus de simplicité dans nos explications, le cas d'une racine double. On a, dans cette hypothèse,

$$\frac{\varphi(x)}{1 + A_1x + \ldots + A_ix^i} = \frac{\lambda_1}{(x-\theta_1)^2} + \frac{\lambda_2}{x-\theta_1} + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda i}{x-\theta_{i-1}}.$$

La dérivée d'ordre n, $y^{(n)}$ renferme, entre autres termes,

$$\frac{(-1)^n 2.3\ldots(n+1)\lambda_1}{(x-\theta_1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n 1.2\ldots n\lambda_2}{(x-\theta_1)^{n+1}} + \ldots$$

Si l'on fait $x = 0$, dans les deux valeurs de $y^{(n)}$, conformément à la méthode que nous avons indiquée tout à l'heure, on voit que le coefficient de z_1, z_1 étant la racine double, est de la forme $\alpha n + \beta$; α et β désignant des constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc donnée par la formule $U_n = (\alpha n + \beta)\, z_1{}^n + \lambda_3 z_2{}^n + \ldots + \lambda_i z_{i-1}{}^n$.

Elle renferme encore i constantes arbitraires:

$$\alpha, \beta\,;\ \lambda_3, \ldots \lambda_i.$$

On voit de même que si z_1 est une racine triple, l'intégrale générale est U_n, en posant

$$U_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) z_1{}^n + \lambda_4 z_2{}^n + \ldots + \lambda_i z^{i-2},$$

formule dans laquelle α, β, γ; λ_4, ... λ_i, désignent i constantes arbitraires, et ainsi de suite.

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

AXES DE LA SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE

Nous considérons un ellipsoïde et admettons que la question a été ramenée, comme il est aisé de le faire, à la section par un plan mené par le centre.

Soient $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

le plan sécant, et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'ellipsoïde; appelons (x', y', z') l'extrémité de l'un des axes de la section, l'autre satisfait aux équations

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$$
$$xx' + yy' + zz' = 0$$
$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0\,;$$

donc il vient pour la déterminer la condition

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha yz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \beta zx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$
$$+ \gamma xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

cône du second degré passant par les deux axes de la section; il passe aussi par la normale au plan et par les trois axes de coordonnées.

Posons maintenant

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

R demi-axe de la section, on a pour calculer R à joindre à l'équation ci-dessus celle du cône et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

puis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Mais sous ces conditions l'équation du cône donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ R^2 & y & z \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma\left(1 - \frac{R^2}{b^2}\right) - \beta z\left(1 - \frac{R^2}{c^2}\right)$$

et opérant de même sur les autres colonnes on a la suite de rapports égaux

$$\frac{x}{\dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{R^2}{a^2}}} = \frac{y}{\dfrac{\beta}{1 - \dfrac{R^2}{b^2}}} = \frac{z}{\dfrac{\gamma}{1 - \dfrac{R^2}{c^2}}}$$

donnant enfin quand on remplace dans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{1 - \frac{R^2}{a^2}} + \frac{\beta^2}{1 - \frac{R^2}{b^2}} + \frac{\gamma^2}{1 - \frac{R^2}{c^2}} = 0,$$

équation quadratique donnant les carrés des demi-axes.

SUR L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES

Par M. **Edouard Lucas.**

Les méthodes connues pour former l'équation aux carrés des différences des racines d'une équation donnée de degré m sont assez longues et impraticables; cela tient à ce que l'on se propose d'exprimer les coefficients de l'équation cherchée en fonction des m coefficients de l'équation donnée; mais, si l'on remarque que l'équation aux carrés des différences ne change pas lorsque l'on augmente d'une même quantité arbitraire les racines de la proposée, il est possible d'exprimer les coefficients inconnus au moyen de $(m - 1)$ fonctions des coefficients de l'équation primitive, et, par exemple, au moyen des coefficients de l'équation transformée par la suppression du second terme. Nous nous proposons d'exposer une méthode assez rapide pour le troisième degré et pour le quatrième.

1. — Désignons par α, β, x les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et par z l'une des racines de l'équation aux carrés des différences; on a

$$z = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta;$$

mais, d'autre part,

$$\alpha + \beta + x = 0 \text{ et } \alpha\beta x = -q.$$

Par suite

$$z = x^2 + \frac{4q}{x},$$

et

$$x^3 - xz + 4q = 0$$

Retranchant membre à membre de la proposée, on tire

$$x = \frac{3q}{p+z}.$$

De là le procédé suivant : *Pour obtenir l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

il suffit de remplacer x *par* $\frac{3q}{p+z}$, *et l'on trouve*

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

2. — Considérons plus généralement l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

et posons $ac - b^2 = \delta$;

en supposant d'abord $a = 1$, l'équation peut s'écrire

$$(x+b)^3 + 3\delta(x+b) + d - b^3 - 3b\delta = 0.$$

En considérant $x + b$ comme l'inconnue, l'équation aux carrés des différences est donc

$$a^4z^3 + 18a^2\delta z^2 + 81\delta^2 z - \Delta = 0,$$

et l'on a $\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$.

On retient facilement cette dernière expression en observant qu'elle est égale au résultant des dérivées partielles

$$f'_x = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad f'_y = bx^2 + 2cxy + d'y^2$$

du premier membre de l'équation rendue homogène; ou encore au discriminant du hessien

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2.$$

3. — Considérons maintenant l'équation du quatrième degré $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$,

et posons

$$16(ac - b^2) = \mathrm{D}, \qquad 4(ae - 4bd + 3c^2) = \mathrm{I},$$

$$16\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \mathrm{J}.$$

Nous supposerons $a = 1$; l'équation peut s'écrire

$$\left(x^2 + 2bx + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2(4b^2 + y - 6c) + 2x(by - 2d) + \frac{y^2}{4} - e:$$

si l'on exprime que le second membre est un carré parfait on obtient une équation du troisième degré en y que l'on appelle la *réduite* de Ferrari :

$$(y^2 - 4e)(y + 4b^2 - 6c) - 4(by - 2d)^2 = 0. \quad (1)$$

ou bien, en désignant $y - 2c$ par λ,

$$\lambda^3 - I\lambda + J = 0. \quad (2)$$

Désignons par α, β, γ, δ les racines de la proposée, par y_1, y_2, y_3 celles de la réduite, on a

$$y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta, \quad y_2 = \alpha\gamma + \beta\delta, \quad y_3 = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Soient u et z les racines des équations aux carrés des différences des racines de la proposée et de la réduite, il vient

$$z_1 = (y_2 - y_3)^2 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 = u_1u_4,$$
$$z^2 = (y_3 - y_1)^2 = (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 = u_2u_5,$$
$$z_3 = (y_1 - y_2)^2 = (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 = u_3u_6.$$

On a ainsi. $\quad z_1z_2z_3 = u_1u_2u_3u_4u_5u_6.$

Donc : *Le produit des carrés des différences des racines d'une équation du quatrième degré est égal au produit des carrés des différences des racines de la réduite de Ferrari.*

En se reportant au § 1 et en prenant l'équation (2) au lieu de l'équation (1), on en déduit immédiatement l'expression

$$a^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2 = 4I^3 - 27J^2,$$

qui a été obtenue, pour la première fois, par M. Cayley.

4. — Par le § 1, on déduit

$$\lambda = \frac{3J}{z - I}, \quad \text{et} \quad z = I + \frac{3J}{\lambda}.$$

D'autre part,

$$u_1 + u_4 = (\alpha - \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2y_1,$$

d'où $\quad u_1 + u_4 = - D - 2\lambda_1,$

et $\quad u_1u_4 = z.$

On obtient donc l'équation aux carrés des différences en éliminant λ entre les équations

$$\lambda^3 - I\lambda + J = 0,$$

et $\quad u^2 + u(D + 2\lambda) + I + \dfrac{3J}{\lambda} = 0,$

c'est-à-dire entre les deux équations du second degré

$$\begin{cases} 2u\lambda^2 + \lambda(u^2 + uD + I) + 3J = 0, \\ 3\lambda^2 - 2\lambda u - (u^2 + uD + 4I) = 0; \end{cases}$$

et l'on trouve ainsi, assez simplement,

$$u^3(u + D)^3 + 2Iu^4 + 2(4ID + 13J)u^3 + (6ID^2 - 18DJ - 7I^2)u^2$$
$$+ 9I(ID - 6J)u + 4I^3 - 27J^2 = 0.$$

ÉCOLE NORMALE 1883

Solution par M. LEVAVASSEUR.

On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation $(x^2 + y^2)x = ay^2$. *Soient* x' *et* y' *les coordonnées d'un point* M *du plan. On propose de former : 1° l'équation du 3e degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent le point* O *aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point* M; *2° l'équation du cercle qui passe par les trois points de contact.*

Montrer que si les trois tangentes sont réelles, le point M *est intérieur au cercle.*

On considère l'ensemble des cercles C_m *dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en chacun des points où ils la rencontrent concourent en un même point : soit* M *ce point de concours pour le cercle* C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m *qui passent par un point donné* P *du plan, ainsi que le lieu des points* M *relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point* P *est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle* C_m *et à la cissoïde pour lesquels les trois tangentes concourent.*

Combien passe-t-il de cercles C_m *pour deux points donnés* P *et* Q *du plan? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles* C_m?

Soient α et β les coordonnées du point de contact d'une tangente issue du point M à la cissoïde. La tangente au point $\alpha\beta$ à la cissoïde a pour équation

$$x(3\alpha^2 + \beta^2) + y(2\alpha\beta - 2a\beta) - a\beta^2 = 0.$$

Si nous exprimons que cette tangente passe par le point $x'y'$, nous obtiendrons la relation

$$(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\beta(\alpha - a)y' - a\beta^2 = 0. \qquad (1)$$

Le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine au

point $\alpha\beta$ est $\frac{\beta}{\alpha}$. D'ailleurs le point $\alpha\beta$ est sur la cissoïde, donc $(\alpha^2 + \beta^2)\alpha = a\beta^2$. (2)

Entre (1) et (2) formons une combinaison homogène par rapport aux lettres α et β.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2 = 2a\beta y'.$$

La combinaison sera donc la suivante :

$$[(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2]a\beta^2 = 2a\alpha\beta y'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Nous remarquons le facteur β qui s'explique par la considération de la droite OM, laquelle peut être appelée tangente à la cissoïde au point O, puisqu'elle rencontre la courbe en deux points confondus au point O. Ce facteur supprimé, il reste

$$\beta[(3\alpha^2 + \beta^2)x' + 2\alpha\beta y' - a\beta^2] = 2\alpha y'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Divisons les deux membres par α^3 et posons $\frac{\beta}{\alpha} = m$. On a

$$m(3x' + m^2x' + 2my' - am^2) = 2y'(1 + m^2)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} 3x'm + x'm^3 + 2y'm^2 \\ - am^3 - 2y'm^2 - 2y' \end{array}\right\} = 0$$

ou enfin

$$(x' - a)m^3 + 3x'm - 2y' = 0 \qquad (A)$$

Cherchons maintenant l'équation du cercle qui passe par les trois points de contact des tangentes issues du point M à la cissoïde.

Soit $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'équation de ce cercle.

Si avec cette équation et l'équation de la cissoïde, je fais une combinaison homogène en x et y, j'aurai en posant $m = \frac{y}{x}$ une équation en m qui me donnera les coefficients angulaires des droites allant de l'origine aux points d'intersection du cercle avec la cissoïde ; or l'équation

$$x^2 + y^2 + (\alpha x + \beta y)\,\frac{x(x^2 + y^2)}{ay^2} + \gamma\,\frac{x^2(x^2 + y^2)^2}{a^2y^4} = 0$$

admet un facteur évident, $x^2 + y^2$, de sorte qu'on peut dire : l'intersection d'une cissoïde et d'un cercle est un problème qui s'abaisse au 4e degré, ces courbes passant toutes les deux par les ombilics du plan. Ce facteur supprimé, il reste une équation du 4e degré.

$$a^2y^4 + axy^2(\alpha x + \beta y) + \gamma x^2(x^2 + y^2) = 0$$

ou $$a^2m^4 + am^2(\alpha + \beta m) + \gamma(1 + m^2) = 0.$$

Cette équation doit admettre les trois racines de l'équation (A).

Donc on peut écrire l'identité

$$a^2m^4 + a\beta m^3 + (a\alpha + \gamma)m^2 + \gamma$$
$$\equiv (pm + q)[(x' - a)m^3 + 3x'm - 2y']$$
$$\equiv p(x' - a)m^4 + q(x' - a)m^3 + 3px'm^2 - 2py'm - 2qy' + 3qx'm.$$

J'en déduis les égalités

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= p(x' - a) \quad (1)\\ a\beta &= q(x' - a) \quad (2)\\ a\alpha + \gamma &= 3px' \quad (3)\\ 2py' &= 3qx' \quad (4)\\ \gamma + 2qy' &= 0 \quad (5)\end{aligned}\right\}$$

De (1) je tire $p = \frac{a^2}{x' - a}$. Je transporte dans (4) ce qui me donne $q = \frac{2a^2y'}{3x'(x' - a)}$.

Donc (2) devient

$$a\beta = \frac{2a^2y'}{3x'} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{2ay'}{3x'}$$

et (5) $$\gamma = -\frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)}.$$

Enfin l'équation (3) me donne α.

$$a\alpha = \frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)} + \frac{3a^2x'}{x' - a},$$

donc $$\alpha = \frac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x' - a)}.$$

L'équation du cercle cherché sera par conséquent

$$x^2 + y^2 + \frac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x' - a)}x + \frac{2ay'}{3x'}y - \frac{4a^2y'^2}{3x'(x' - a)} = 0.$$

Nous allons montrer que si les trois tangentes issues du point M à la cissoïde sont réelles, le point M est à l'intérieur du point C_m.

L'équation A, $m^3 + \frac{3x'}{x' - a}m - \frac{2y'}{x' - a} = 0$, aura ses racines réelles si les coordonnées x' et y' satisfont à l'inégalité $\frac{x'^3}{(x' - a)^3} + \frac{y'^2}{(x' - a)^2} < 0$ ou $\frac{x'^3}{x' - a} + y'^2 < 0$.

Or considérons la puissance Π du point M par rapport au cercle C_m

$$\Pi = x'^2 + y'^2 + ax'\,\frac{4y'^2 + 9x'^2}{3x'(x'-a)} + \frac{2ay'^2}{3x'} - \frac{4a^2y'^2}{3x'(x'-a)};$$

$$3x'(x'-a)\Pi = 3x'^3(x'-a) + 3x'y'^2(x'-a)$$
$$+ a\,[4y'^2x' + 9x'^3 + 2y'^2(x'-a) - 4ay'^2].$$

Donc $$3x'(x'-a)\Pi = 3x'[x'^3 + y'^2(x'-a)]$$
$$+ a[4y'^2(x'-a) + 6x'^3 + 2y'^2(x'-a)]$$

ou $$x'(x'-a)\Pi = [x'^3 + y'^2(x'-a)](x'+2a)$$

Donc enfin $$\Pi = \frac{x'+2a}{x'}\cdot\left[\frac{x'^3}{x'-a} + y'^2\right].$$

Or je remarque que si x' est négatif, la condition $\frac{x'^3}{x'-a} + y'^2 < 0$ ne serait pas réalisée ; x étant positif, $\frac{x'+2a}{x'}$ serait positif, donc Π est négatif en même temps que le second facteur. C. Q. F. D.

Je désigne par x_0 et y_0 les coordonnées du point fixe P par lequel passent tous les cercles C_m que nous allons désormais considérer.

L'équation du lieu du point M s'obtient immédiatement en exprimant que le cercle passe par le point P

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0\,\frac{4y^2 + 9x^2}{3x(x-a)} + \frac{2ay}{3x}\,y_0 - \frac{4a^2y^2}{3x(x-a)} = 0$$

ou $$3x(x-a)(x_0^2 + y_0^2) + ax_0(4y^2 + 9x^2)$$
$$+ 2ay_0y(x-a) - 4a^2y^2 = 0.$$

Ordonnons cette équation

$$\left.\begin{matrix} 3(x_0^2+y_0^2)x^2 - 3a(x_0^2+y_0^2)x + 4ax_0y^2 + 2ay_0xy - 2a^2y_0y \\ +9ax_0x^2 \qquad\qquad -4a^2y^2 \end{matrix}\right\} = 0$$

ou $$3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x^2 + 4a(x_0 - a)y^2 + 2ay_0xy$$
$$= 3a(x_0^2 + y_0^2)x + 2a^2y_0y.$$

Cette conique passe par l'origine. Ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant la valeur de

$$U = a[12(x_0 - a)(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0) - a^2y_0^2].$$

Les coordonnées du centre du cercle C_m sont données par les équations $$2x + \frac{4ay'^2 + 9ax'^2}{3x'(x'-a)} = 0$$

et $$y + \frac{ay'}{3x'} = 0.$$

La dernière pouvant s'écrire $\frac{x'}{a} = \frac{y'}{-3y}$, je ferai une combinaison homogène entre

$$3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x'^2 + 4a(x_0 - a)y'^2 + 2ay_0x'y' = 3a(x_0^2 + y_0^2)x' + 2a^2y_0y'$$

et
$$6xx'^2 + 4ay'^2 + 9ax'^2 = 6axx',$$

savoir

$$[3(x_0^2 + y_0^2)x' + 2ay_0y'][6xx'^2 + 4ay'^2 + 9ax'^2] = 6xx'[3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x'^2 + 4a(x_0 - a)y'^2 + 2ay_0x'y']$$

Remplaçons dans cette équation x' par a, y' par $-3y$.

On a $[3(x_0^2 + y_0^2)a - 6ay_0y](6a^2x + 36ay^2 + 9a^3)$
$$= 6ax[3a^2(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0) + 36a(x_0 - a)y^2 - 6a^2y_0y]$$

ou
$$9a^2[(x_0^2 + y_0^2) - 2y_0y](2ax + 12y^2 + 3a^2) = 18a^2x[a(x_0^2 + y_0^2) + 3a^2x_0 + 12(x_0 - a)y^2 - 2ay_0y]$$

ou enfin

$$3(x_0^2 + y_0^2 - 2y_0y)(4y^2 + a^2) = 2x\begin{bmatrix} a(x_0^2 + y_0^2) + 3a^2x_0 + 12(x_0 - a)y^2 - 2ay_0y \\ - a(x_0^2 + y_0^2) \qquad\qquad + 2ay_0y \end{bmatrix}$$

ce qui donne l'équation

$$(x_0^2 + y_0^2 - 2y_0y)(4y^2 + a^2) = 2x[4(x_0 - a)y^2 + a^4x_0]$$

Les asymptotes de cette courbe parallèles à Ox seront réelles ou imaginaires suivant le signe du produit

$$x_0(a - x_0)$$

Premier cas. — $x_0(a - x_0) > 0$. — Les deux asymptotes sont réelles.

Ce cas se divise en trois autres. En effet, les deux asymptotes, l'axe Oy et la droite $y = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$ séparent le plan en régions, et l'on a différents genres de courbes suivant que cette dernière droite sera intérieure aux deux asymptotes ou extérieure ou confondue avec l'une d'elles.

1° x_0 et y_0 satisfont à l'inégalité $\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} < a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$

Cherchons l'équation de la troisième asymptote

$$\varphi_m(1, c) = 8(x_0 - a)c^2 + 8y_0c^3 = 0;$$

donc
$$c = \frac{a - x_0}{y_0}$$

$$\varphi'_m(1, c) = 16(x_0 - a)c24y_0c^2$$

$$\varphi_m - 1 = -4(x_0^2 + y_0^2)c^2$$

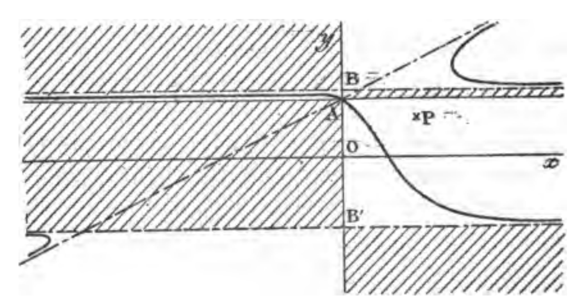
$$d = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)c^2}{16(x_0 - a)c + 24y_0c^2} = \frac{(x_0^2 + y_0^2)c}{(4x_0 - a) + 6y_0c}$$

$$= \frac{(x_0^2 + y_0^2)\dfrac{(a - x_0)}{y_0}}{4(x_0 - a) + 6(a - x_0,} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$y = \frac{a - x_0}{y_0}y + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}.$$

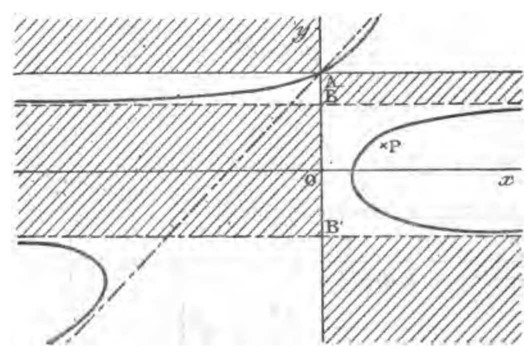
La courbe a dans ce cas la forme suivante :



2° Si au contraire nous supposons que l'on ait

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} > a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$$

Alors la forme de courbe est différente ; ce sera la suivante :



3° Considérons maintenant le cas où l'on aurait

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = a\sqrt{\frac{x_0}{a - x_0}}$$

et interprétons tout d'abord cette condition. Elle peut s'écrire

$$\frac{(x_0^2 + y_0^2)^2}{y_0^2} = \frac{a^2x_0}{a - x_0}$$

ou $$a^2x_0y_0^2 - a(x_0^2 + y_0^2)^2 + x_0(x_0^2 + y_0^2)^2 = 0.$$

D'où je tire

$$a = \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^4 - 4x_0^2y_0^2(x_0^2 + y_0^2)^2}}{2x_0y_0^2}$$

ou $$a = \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2 \pm (x_0^4 - y_0^4)}{2x_0y_0^2}.$$

Si nous prenons le signe $+$, on a

$$a = \frac{2x_0^4 + 2x_0^2y_0^2}{2x^0y^{02}} = \frac{x_0(x_0^2 + y_0^2)}{y_0^2}.$$

Cette condition veut dire que le point en ce cas est sur la cissoïde. Nous traiterons ce cas tout à l'heure.

Si nous prenons le signe $-$, on trouve

$$a = \frac{2x_0^2y_0^2 + 2y_0^4}{2x_0y_0^2}$$

ou $$x_0^2 + y_0^2 = ax_0.$$

C'est le cercle décrit sur OA comme diamètre. Je dis que pour tout point pris sur le cercle $x_0^2 + y_0^2 - ax_0 = 0$ le lieu des centres des cercles C_m se décompose en une droite et une hyperbole.

En effet, je pose $y_0 = tx_0$.

J'ai $$x_0 = \frac{a}{1 + t^2}, \quad y_0 = \frac{at}{1 + t^2}.$$

Donc $$x_0 - a = -\frac{at^2}{1 + t^2}$$

et $$x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2}{(1 + t^2)^2}(1 + t^2) = \frac{a^2}{1 + t^2}.$$

L'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{a^2}{1 + t^2} - \frac{t}{1\ a+ {}^2}\ y\right)(4y^2 + a^2) = 2x\left[\frac{a^3}{1 + t^2} - \frac{4at^2}{1 + t^2}\ y^2\right]$$

ou $$(a - 2ty)(4y^2 + a^2) = 2x(a^2 - 4t^2a^2)$$

ce qui met en évidence la droite $y = \frac{a}{2t}$.

Reste l'hyperbole $4y^2 + a^2 = 2x(a + 2ty)$.

Elle admet pour asymptote la droite $yx = -\frac{a}{2t}$.

La conique lieu du point M se décompose aussi en deux droites. Remplaçons en effet x_0 et y_0 par leurs valeurs dans l'équation de cette conique et l'on a,

$$3\left(\frac{a^2}{1+t^2} + 3\frac{a^2}{1+t^2}\right)x^2 - \frac{4a^2t^2}{1+t^2}y^2 + \frac{2a^2t}{1+t^2}xy$$
$$= \frac{3a^3}{1+t^2}x + \frac{2a^3t}{1+t^2}y$$

ou $$12x^2 - 4t^2y^2 + 2txy = 3ax + 2aty$$

ou $$3x(x-a) + 2ty(x-a) = 4t^2y^2 - 9x^2$$

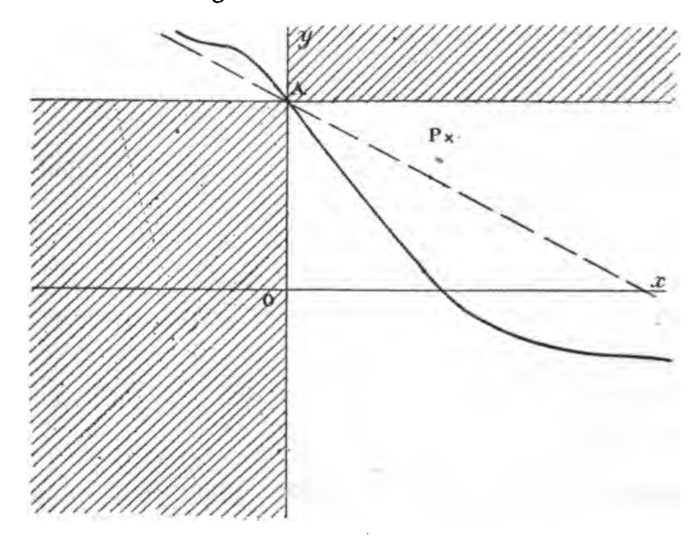
ou $$(x-a)(3x+2ty) = 4t^2y^2 - 9x^2.$$

On voit d'abord la droite $3x + 2ty = 0$

puis la droite $$x - a = 2ty - 9x$$

ou $$10x - 2ty - a = 0.$$

Deuxième cas. — $x_0(a - x_0) < 0$. — Les asymptotes parallèles à Ox sont imaginaires



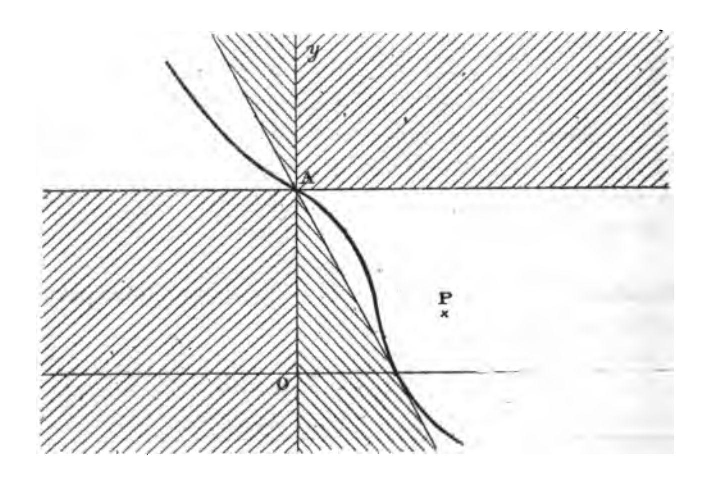
TROISIÈME CAS. — Supposons que le point P soit pris sur Oy, alors $x_0 = 0$, l'équation de la courbe devient

$$y_0 (y_0 - 2y)(4y^2 + a^2) + 8axy^2 = 0.$$

La droite $y = 0$ est une asymptote double. La troisième asymptote a pour équation

$$y = \frac{a}{y_0} x + \frac{y_0}{2}.$$

La droite $y = \frac{y_0}{2}$ et la droite $x = 0$ séparent toujours le plan en régions, et l'on obtient la forme de courbe suivante :



QUATRIÈME CAS. — Supposons enfin que $x = a_0$. L'équation de la courbe correspondant à cette hypothèse est

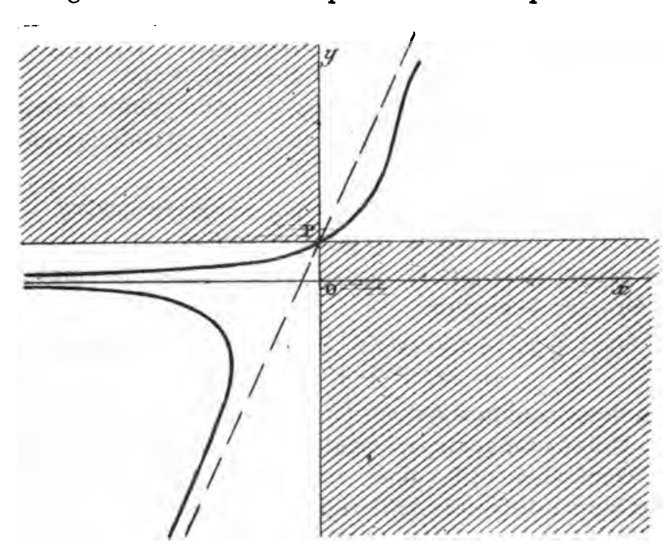
$$(a^2 + y_0^2 - 2y_0y)(4y^2 + a^2) = 2a^3x.$$

Il n'y a pas d'asymptotes rectilignes dans cette courbe puisque les trois droites $y = \frac{a^2 + y_0^2}{2y_0}$ et $y = \pm \frac{a}{2}t$ sont parallèles.

D'ailleurs la courbe coupe Ox en un seul point $x = \frac{a^2 + y_0^2}{2a}$.

L'équation peut d'ailleurs s'écrire $4y^2(a^2 + y_0^2 - 2y_0y) = a^2(2ax + 2y_0y - a^2 - y_0^2)$, ce qui donne une nouvelle

séparation en régions. La droite $2ax + 2y_0y - a^2 - y_0^2 = 0$ est tangente à la courbe au point où elle coupe Ox.



Nous allons maintenant considérer le cas particulier où le point fixe est sur la cissoïde. On a la relation $(x_0^2 + y_0^2)x_0 = ay_0^2$; si l'on pose $y_0 = tx_0$, j'en déduis

$$x_0 = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad x_0 - a = -\frac{a}{1+t^2}, \quad x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2t^4}{1+t^2}.$$

L'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{a^2t^4}{1+t^2} - \frac{2at^3}{1+t^2}y\right)(4y^2 + a^2) = 2x\left(\frac{a^3t^2}{1+t^2} + \frac{4a}{1+t^2}y^2\right)$$

ou $\qquad t^3(at - 2y)(4y^2 + a^2) = 2x(a^2t^2 - 4y^2),$

ce qui donne la droite $\qquad at = 2y$

et l'hyperbole $\qquad t^3(4y^2 + a^2) = 2x(at + 2y).$

L'équation du lieu du point N se décompose, lui aussi, en deux droites, comme on peut le voir par le calcul suivant:

$$3\left(\frac{a^2t^4}{1+t^2} + \frac{3a^2t^2}{1+t^2}\right)x^2 - \frac{4a^2}{1+t^2}y^2 + \frac{2a^2t^3}{1+t^2}xy$$
$$= \frac{3a^3t^4}{1+t^2}x + \frac{2a^3t^3}{1+t^2}y$$

ou $3t^2(t^2 + 3)x^2 - 4y^2 + 2t^3xy = 3at^4x + 2at^4y$

ou $3t^4x(x - a) + 2t^3y(x - a) = 4y^2 - 9t^2x^2$

ou $t^3(x - a)(2y + 3tx) = 4y^2 - 9t^2x^2$

ce qui donne : 1° la droite $2y + 3tx = 0$,

2° la droite $t^3(x - a) = 2y - 3tx$.

Pour que le cercle C passe par un point donné P,(x_0y_0), il faut que les coordonnées $x'y'$ du point M satisfassent à l'équation de la conique

$$3(x_0^2 + y_0^2 + 3ax_0)x^2 + 4a(x_0 - a)y^2 + 2ay_0xy = 3a(x_0^2 + y_0^2)x + 2a^2y_0y.$$

De même, pour que C passe par le point p, le point $x'y'$ doit être sur la conique

$$3(x_1^2 + y_1^2 + 3ax_1)x^2 + 4a(x_1 - a)y_1^2 + 2ay_1xy = 3a(x_1^2 + y_1^2)x + 2a^2y_1y.$$

Ces deux coniques ont un premier point commun à l'origine. Mais la tangente à l'origine est une tangente singulière. Généralement les deux coniques se coupent en trois autres points différents de l'origine. Donc généralement il y aura trois cercles passant par les points P et p.

Pour qu'il y en ait une infinité, il suffit de prendre les points P et p sur la cissoïde ou sur le cercle décrit sur OA comme diamètre, A étant le pied de l'asymptote, et de faire coïncider deux des quatre droites qui forment le lieu du point M.

Quand le point P est sur le cercle, on a pour lieu du point M les droites $3xx_0 + 2yy_0 = 0$ (1)

et pour Q $3xx_1 + 2yy_1 = 0$ (2)

et $10xx_0 - 2yy_0 - ax_0 = 0$ (3)

pour Q $10xx_1 - 2yy_1 - ax_1 = 0$ (4)

Quand le point P est sur la cissoïde, on a les droites

$$3xy_0 + 2x_0y = 0 \quad (5)$$

$$3xy_1 + 2x_1y = 0 \quad (6)$$

$$y_0(y_0^2 + 3x_0^2)x - 2x_0^3y - ay_0^3 = 0 \quad (7)$$

et $y_1(y_1^2 + 3x_1^2)x - 2x_1^3y - ay_1^4 = 0$ (8)

En identifiant (1) et (2) on voit que l'un des points doit être à l'origine et l'autre sur le cercle.

En identifiant (3) et (4), on trouve le même résultat.

De même en identifiant (5) et (6), (7) et (8).

En identifiant (1) et (4) on retrouve encore le même résultat.

Mais si l'on identifie (1) et (6), on trouve

$$\frac{x_0}{y_1} = \frac{y_0}{x_1} = t \quad \text{avec} \quad x_0^2 + y_0^2 = ax_0$$

et
$$(x_1^2 + y_1^2)x_1 = ay_1^2.$$

J'en tire $x_0 = ty_1$ et $y_0 = tx_1$; donc $t(x_1^2 + y_1^2) = ay_1$. Je remplace $x_1^2 + y_1^2$ par sa valeur dans l'équation de la

cissoïde
$$x_1 \frac{ay_1}{t} = ay_1^2, \text{ ou}$$

1° $y_1 = 0$, donc $x_0 = 0$ et par suite $y_0 = 0$: nous retombons dans le premier cas;

2° $x_1 = ty_1 = y_0$ et $y_0 y_1 = x_1^2$.

Ainsi l'un des points est sur le cercle, l'autre sur la cissoïde, tous deux sur la même verticale, et le produit des ordonnées est égal au carré de l'abcisse commune

$$x_0 = x_1 = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{a}{t^2 + 1} t, \quad y_1 = \frac{a}{t^2 + 1} \frac{1}{t}.$$

Et ainsi de suite.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1883

Examens oraux (Suite).

13. — *Équation générale des quadriques dont un axe Δ est donné de position; établir,* a priori, *que la condition proposée est quadruple.*

Prenons le cas des surfaces à centre et considérons l'équation
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = F$$
de la quadrique rapportée à son centre et à ses axes; transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire de l'axe oz, oz étant la droite donnée Δ. Nous obtenons l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''(z - \lambda)^2 = F.$$

Enfin, dans le plan des xy faisons tourner les axes d'un angle arbitraire φ ; des formules connues donnent le résultat final

$$A(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)^2 + A'(X\sin\varphi + Y\cos\varphi)^2 + A''(Z-\lambda)^2 = F.$$

Cette question renferme cinq paramètres variables $\frac{A}{F}$, $\frac{A'}{F}$, $\frac{A''}{F}$, λ et φ. La condition proposée est, en effet, une condition quadruple, et on le reconnaît *a priori*, en exprimant : 1° que le centre est sur Δ (deuxconditions); 2° que la direction de Δ est une direction principale (deux conditions aussi).

On traitera de la même façon le cas des paraboloïdes.

14. — *Lieu des points de la surface* $xy = z$ *par où passent deux génératrices faisant un angle de* 60°.

En exprimant que le cosinus de l'angle des deux droites

$$x = \lambda \qquad y = \mu$$
$$y = \frac{z}{\lambda}, \qquad x = \frac{z}{\mu},$$

est égal à $\frac{1}{2}$, on trouve que le lieu est la quartique gauche intersection du paraboloïde proposé et de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes

$$3z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

15. — *On donne une droite* Δ

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

et par le point P, $x_0y_0z_0$, *on mène une droite* Δ' *perpendiculaire à* Δ. *Ces deux droites* Δ *et* Δ' *forment un système d'axes rectangulaires, dans le plan desquels on considère une courbe* U *ayant pour équation* $f(X, Y) = 0$; (1) *trouver l'équation de la surface de révolution engendrée par* U, *tournant autour de* Δ.

On peut résoudre cette question par une voie simple, en observant que le plan mené par P, perpendiculairement à Δ, a pour équation

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

La distance Y d'un point n de U à ce plan est

$$Y = \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0). \qquad (2)$$

D'autre part, la distance X de ce même point M à Δ est donnée par la formule

$$X^2 = [\beta (x - x_0) - \alpha (y - y_0)]^2 + [\gamma (y - y_0) - \beta (z - z_0)]^2 + [\alpha (z - z_0) - \gamma (x - x_0)]^2. \qquad (3)$$

Lorsque U tourne autour de Δ, X et Y conservent la même valeur et les coordonnées x, y, z du point M vérifient constamment les relations (2) et (3). En tenant compte de l'égalité (1) on a, finalement, l'équation demandée

$$f \left\{ \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0), \sqrt{[\beta (x - x_0) - \alpha (y - y_0)]^2 + \dots} \right\} = 0.$$

RECTIFICATION

DE LA NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Insérée dans le n° 4 de 1883, p. 83.

La formule attribuée à M. Schlömilch par M. Parpaite est due à Edouard Roche, professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Montpellier, qui a donné dans le numéro de juillet 1858 du *Journal de Liouville* cette forme simple et devenue classique du reste de la série de Taylor, renfermant comme cas particuliers les formes de Lagrange et de Cauchy

$$R = \frac{h^{n+1} (1 - \theta)^{n-p}}{1 . 2 \dots n . (p + 1)} f^{n+1} (a + \theta h).$$

Dans le numéro d'avril 1864 du *Journal de Liouville*, Édouard Roche a donné une formule bien plus générale :

$$\frac{f(a + h) - f(a) - hf'(a) \dots - \dfrac{h^n}{1 . 2 \dots n} f^n (a)}{\varphi(a + h) - \varphi(a) - h\varphi'(a) \dots - \dfrac{h^q}{1 . 2 \dots q} \varphi^q (a)} = \frac{1 . 2 \dots q}{1 . 2 \dots n} (h - \theta h)^{n-q} \frac{f^{n+1}(a + \theta h)}{\varphi^{q+1}(a + \theta h)}$$

qui en renferme une infinité d'autres et notamment celle que M. Schlömilch en novembre 1858 avait fait connaître en France, où on ne la connaissait pas avant.

(Extrait d'une lettre de M. A. Roche, professeur au lycée de Montpellier.)

QUESTIONS PROPOSÉES

72. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, et un cercle C, tangent à l'une et à l'autre de ces droites, aux points A et B ; par O, on mène une transversale mobile qui rencontre C aux points M et N ; — 1° par les quatre points A, B, M, N, on fait passer une hyperbole équilatère H. Les tangentes à H aux points M et N se coupent en un point I. Trouver le lieu de ce point quand MN tourne autour du point O. Ce lieu est une circonférence ; — 2° on joint AM et BN ; ces droites se coupent en un point I' : trouver le lieu de ce point I' : ce lieu est une hyperbole, dont on demande l'équation lorsqu'elle est rapportée à son centre et à ses axes ; — 3° par les points A, B, M, N, on fait passer une parabole P ; démontrer que par un point du plan passent deux paraboles P, et trouver avec un seul paramètre variable l'équation générale et rationnelle des paraboles P — 4° trouver le lieu décrit par l'intersection de P avec le diamètre de cette courbe qui passe par le point O. Ce lieu est une hyperbole homothétique de celle qui a été trouvée tout à l'heure, on construira les asymptotes de ces courbes.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 18346-3.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps,**

(*Suite*, voir page 193.)

V. — Nouvelle forme de l'intégrale U_n. — Nous donnerons maintenant l'intégrale U_n sous une forme nouvelle et qui nous semble réaliser un progrès sensible sur celle qu'a donnée Lagrange.

Nous touchons ici à un point important et sur lequel nous devons insister un peu.

Le théorème de Lagrange offre, en effet, deux inconvénients évidents :

1° Il exige la résolution de l'équation génératrice et cette résolution est, généralement, impossible;

2° Quand elle est possible, le théorème de Lagrange donne, ordinairement, l'intégrale U_n sous une forme algébrique compliquée d'expressions irrationnelles. Or, la fonction U_n, si l'on se reporte à sa définition même, est une forme entière des coefficients donnés $A_1, A_2, \ldots A_i$, et des constantes initiales $U_0, U_1, \ldots U_{i-1}$.

Nous allons montrer, et c'est là ce qui constitue le progrès que nous voulions signaler, que l'on peut trouver U_n sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation génératrice.

Reprenons l'équation de récurrence

$$U_n + A_1U_{n-1} + \ldots + A_iU_{n-i} = 0. \qquad (A)$$

Effectuons un changement de fonctions et posons

$$U_n = V_n + \alpha^n;$$

l'équation (A) donne la suivante :

$$V_n + A_1V_{n-1} + \ldots + A_iV_{n-i} + \rho = 0,$$

en posant $\rho = \alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \ldots + A_i\alpha^{n-i}$.

Disposons maintenant de l'indéterminée α de façon qu'elle soit une des racines de l'équation

$$\alpha^i + A_1\alpha^{i-1} + \ldots + A_i = 0.$$

Les fonctions V vérifient alors la relation de récurrence

$$V_n + A_1V_{n-1} + \dots + A_iV_{n-i} = 0,$$

et cette relation ne diffère de celle qui détermine les fonctions U que par le simple changement des lettres U et V. On doit seulement observer que les constantes initiales sont modifiées, les nouvelles constantes V_0, V_1, ... V_{i-1}, étant liées aux anciennes par les égalités suivantes :

$$U_0 = V_0 + 1$$
$$U_1 = V_1 + \alpha$$
$$\dots\dots$$
$$U_{i-1} = V_{i-1} + \alpha^{i-1}.$$

Si nous imaginons le calcul que l'on peut faire, de proche en proche, des fonctions U_i, U_{i+1}, ... U_n, nous reconnaissons qu'elles sont, sans exception, des formes algébriques linéaires et homogènes, par rapport aux constantes initiales U_0, U_1, ... U_{i-1}. Nous pouvons, d'après cette remarque, poser

$$U_n = p_0U_{i-1} + p_1U_{i-2} + \dots + p_{i-1}U_0; \qquad (1)$$

$p_0, p_1, \dots p_{i-1}$ étant des fonctions de n et des coefficients donnés A_1, A_2, ... A_i, mais ne dépendant pas des constantes initiales.

Puisque la loi de récurrence est la même pour les fonctions U et V, on a donc aussi

$$V_n = p_0V_{i-1} + p_1V_{i-2} + \dots p_{i-1}V_0. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent la relation suivante :

$$U - V_n = p_0(U_{i-1} - V_{i-1}) + \dots + p_{i-1}(U_0 - V_0),$$

ou, $$\alpha^n = p_0\alpha^{i-1} + p_1\alpha^{i-2} + \dots + p_{i-1}.$$

Désignons maintenant par α_1, α_2, ... α_i, les i racines, supposées distinctes, de l'équation génératrice ; nous obtenons les relations

$$\alpha_1^n = p_0\alpha_1^{i-1} + p_1\alpha_1^{i-2} + \dots + p_{i-1}$$
$$\alpha_2^n = p_0\alpha_2^{i-1} + p_1\alpha_2^{i-2} + \dots + p_{i-1}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\alpha_i^n = p_0\alpha_i^{i-1} + p_1\alpha_i^{i-2} + \dots + p_{i-1}.$$

Ces équations déterminent p_0, p_1, ... p_{i-1} ; le déterminant des inconnues est un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{i-1}, & \alpha_1^{i-2}, & \dots & 1 \\ \alpha_2^{i-1}, & \alpha_2^{i-2}, & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i^{i-1}, & \alpha_i^{i-2}, & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

et l'on sait que ce déterminant est différent de zéro, si, comme nous l'avons supposé, les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$, de l'équation génératrice sont distinctes. On doit aussi remarquer que les inconnues $p_0, p_1, \dots p_{i-1}$ sont des *fonctions symétriques* des racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ et, par conséquent, des *fonctions rationnelles et connues des coefficients de l'équation génératrice.*

Il n'est donc pas nécessaire de résoudre l'équation génératrice, pour obtenir la fonction U_n — et celle-ci peut toujours se déterminer. C'est là le point que nous voulions mettre en lumière.

VI. — Expression de U_n. — La fonction U_n peut aussi se calculer au moyen d'une formule que nous allons faire connaître et qui a l'avantage de n'exiger que la connaissance de la fonction qui donne la somme des puissances n des racines d'une équation donnée.

L'équation proposée étant

$$U_n + A_1 U_{n-1} + \dots + A_i U_{n-i} = 0,$$

l'équation génératrice est

$$z^i + A_1 z^{i-1} + \dots + A_i = 0,$$

et l'intégrale U_n est, d'après le théorème de Lagrange,

$$U_n = \rho_1 z_1^n + \rho_2 z_2^n + \dots + \rho_i z_i^n \qquad \text{(B)}$$

$\rho_1, \rho_2, \dots \rho_i$ étant des constantes arbitraires, $z_1, z_2, \dots z_i$ désignant les i racines, réelles ou imaginaires, de l'équation génératrice.

Posons : $S_n = z_1^n + z_2^n + \dots + z_i^n$;

nous aurons alors

$$S_{n+1} = z_1^n \cdot z_1 + z_2^n \cdot z_2 + \dots + z_i^n \cdot z_i$$
$$S_{n+2} = z_1^n \cdot z_1^2 + z_2^n \cdot z_2^2 + \dots + z_i^n \cdot z_i^2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$S_{n+i-1} = z_1^n \cdot z_1^{i-1} + z_2^n \cdot z_2^{i-1} + \dots + z_i^n \cdot z_i^{i-1}.$$

De ces égalités, et de la relation (B), nous déduisons, en éliminant $z_1^n, z_2^n, \dots z_i^n$:

$$\begin{vmatrix} U_n & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_i \\ S_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ S_{n+1} & z_1 & z_2 & \dots & z_i \\ S_{n+2} & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+i-1} & z_1^{i-1} & z_2^{i-1} & \dots & z_i^{i-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule permet encore de reconnaître que U_n est une fonction symétrique des racines $z_1, z_2, \dots z_i$ et, quand on fait varier n, on voit qu'il suffit de connaître S_n pour avoir U_n.

Cette fonction S_n est, d'ailleurs, donnée par une formule bien connue, due à *Waring* (*), et qui peut s'écrire

$$S_n = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m} n(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i-1) \frac{A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \dots A_i^{\lambda_i}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots\lambda_i!},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles et positives des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ qui vérifient la relation :

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + i\lambda_i = n. \qquad (\lambda)$$

Mais cette formule de Waring présente l'inconvénient grave d'exiger la résolution, en nombres entiers et positifs, de l'équation (λ), et l'intégrale U_n se calcule, plus commodément, en suivant la Méthode que nous avons exposée, au paragraphe précédent. On évite ainsi l'exposition du théorème de Lagrange et, pour mieux montrer l'avantage de notre méthode, nous allons l'appliquer au cas qui se présente le plus ordinairement, nous voulons parler du cas simple où la récurrence des fonctions U_n correspond à la formule

$$\alpha U_n + \beta U_{n-1} + \gamma U_{n-2} = 0.$$

(A suivre.)

(*) Serret. *Alg., sup.*, t. I, p. 449.

SUR LE VOLUME DU TÉTRAÈDRE

EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Édouard Lucas.**

On donne habituellement dans les cours une démonstration assez compliquée de l'expression analytique du volume du tétraèdre lorsque l'on connaît les coordonnées de ses sommets. Voici comment il est facile d'obtenir directement cette expression en coordonnées rectangulaires, obliques ou tétraédriques, sans passer par la formule qui donne la distance d'un point à un plan.

Désignons par x_i, y_i, z_i, les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point P_i, par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

par Δ_1 et Δ_1' les résultats obtenus en remplaçant dans Δ les coordonnées x, y, z par celles des deux points P_1 et P'_1.

D'après le sixième livre de géométrie élémentaire, on sait que le volume de deux tétraèdres ($P_1P_2P_3P_4$ et $P'_1P_2P_3P_4$) de même base sont dans le rapport des hauteurs; mais les distances de P_1 et de P'_1 au plan passant par P_2, P_3, P_4, sont dans le rapport de Δ_1 à Δ'_1; on a donc

$$\frac{\text{vol. } (P_1P_2P_3P_4)}{\text{vol. } (P'_1P_2P_3P_4)} = \frac{\Delta_1}{\Delta'_1}.$$

D'après le principe des signes des distances à un plan, on doit prendre les volumes des tétraèdres dont les sommets ont un ordre donné avec les mêmes signes ou avec les signes contraires, suivant que des points P_1 et P'_1 on aperçoit le *sens de circulation* de $P_2P_3P_4$ de la même manière ou de manières différentes; ainsi l'expression analytique du volume d'un tétraèdre changera de signe lorsque l'on échangera l'ordre de deux sommets. On a donc cette proposition :

Les volumes de deux tétraèdres ayant trois sommets communs sont dans le rapport des déterminants des douze coordonnées de leurs sommets.

Plus généralement, considérons deux tétraèdres quelconques ABCD et PQRS; par convention, nous prendrons les volumes de ces tétraèdres avec les mêmes signes ou avec les signes contraires, suivant que des points P et S on aperçoit le sens de circulation de ABC et de PQR dans le même sens de rotation ou dans des sens contraires. Comparons successivement les volumes des tétraèdres

ABCD, ABCS, ABRS, AQRS, PQRS;

deux tétraèdres consécutifs ont trois sommets communs; donc, en multipliant membre à membre les égalités obtenues par l'application de la proposition précédente, on en déduit ce théorème :

Les volumes de deux tétraèdres quelconques sont dans le rapport des déterminants des douze coordonnées de leurs sommets.

Si l'on prend pour l'un des tétraèdres celui qui a pour sommets l'origine O des coordonnées et les extrémités X, Y, Z, de longueurs égales à l'unité sur chacun des axes, on sait que l'on a

$$\text{XYZO} = \frac{1}{6} \sin(x, y, z);$$

mais le déterminant des coordonnées devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d'où l'on déduit

$$\text{vol}\,(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{6}\Delta_1 \sin(x, y, z).$$

De même si x_i, y_i, z_i, t_i, sont les distances d'un point P aux quatre faces du tétraèdre de référence; h_1, h_2, h_3, h_4, les hauteurs du tétraèdre, on a

$$\text{vol}\,(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{1}{6} \frac{\Delta_1}{h_1h_2h_3h_4} \text{vol}\,(\text{ABCD})$$

Exercices à démontrer sur le volume du tétraèdre.

I. — Si par les sommets d'un tétraèdre on mène des parallèles à une droite donnée, elles rencontrent les faces en quatre points qui forment un tétraèdre de volume constant, quelle que soit la direction de la droite donnée.

II. — Si par les centres de quatre cercles d'un plan on élève perpendiculairement au plan des droites de longueurs respectivement proportionnelles aux puissances d'un point donné du plan par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant, quelle que soit la position du point donné.

III. — On donne deux tétraèdres ABCD et PQRS; démontrer la relation

$$\begin{aligned}ABCD \,.\, PQRS = PBCD \,.\, AQRS + PCDA \,.\, BQRS \\ + PDAB \,.\, CQRS + PABC \,.\, DQRS,\end{aligned}$$

qui est la généralisation d'un théorème de Fontaine et de Monge. (CHASLES, *Géom. supér.* p. 23.)

IV. — On considère deux polyèdres quelconques $A_1B_1C_1D_1$... et $A_2B_2C_2D_2$ .. ; soient A'_2, B'_2,... les points symétriques de A_2,B_2,... par rapport à un point quelconque P ; a_1, b_1, c_1, d_1,... les milieux de A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2,... et a_2, b_2,... les milieux de $A_1A'_2$, $B_1B'_2$,... ; démontrer que la somme des volumes des polyèdres $a_1b_1c_1$... et $a_2b_2c_2$... est la demi-somme des volumes des polyèdres donnés, quelle que soit la position du point P.

SUR CERTAINES COURBES GAUCHES

DU QUATRIÈME ORDRE

Par M. **Bioche**, professeur au Lycée de Poitiers.

On sait que par une courbe gauche du quatrième ordre (ou quartique gauche) déterminée par l'intersection de deux surfaces du deuxième degré, il passe une infinité de surfaces de ce degré. Il existe des quartiques gauches telles que par

une de ces courbes il ne peut passer qu'une seule surface du deuxième degré. Ces courbes ont été étudiées en particulier par Steiner.

I. — On peut obtenir ces courbes en se servant d'un système de coordonnées imaginé par M. Chasles pour l'étude des courbes tracées sur des surfaces du deuxième degré à génératrices rectilignes réelles. Soient OX et OY deux génératrices de systèmes différents; par un point quelconque M de la surface passent deux génératrices :

L'une MA, de même système que OY, rencontre OX en A;

L'autre MB, de même système que OX, rencontre OY en B. Au point M correspondent donc deux segments OA, OB sur les génératrices fixes. Inversement, à ces segments correspond un point et un seul. Ce système de coordonnées est analogue au système de coordonnées cartésiennes dans le plan. Une équation $f(x,y) = 0$ représentera une courbe sur la surface.

Si $f(x,y)$ est de degré m par rapport à x et de degré μ par rapport à y, la courbe représentée par $f(x,y) = 0$ rencontre m fois les génératrices de système OX et μ fois les génératrices de système OY. Elle rencontre donc $m + \mu$ fois un plan tangent quelconque; elle est de l'ordre $m + \mu$.

Pour les courbes du quatrième ordre $m + \mu = 4$; on peut prendre $m = \mu = 2$; on a alors les courbes d'intersection de deux surfaces du second degré. Si on prend l'un des nombres égal à 3, l'autre sera égal à 1; et on a une courbe dite de *seconde espèce.*

Par une telle courbe il ne passe qu'une surface du deuxième degré. Car si $m = 3$ par exemple, toute surface du deuxième degré qui contiendrait la courbe proposée contiendrait également toutes les génératrices du système OX qui sont des sécantes triples de la courbe.

Toute quartique intersection de deux surfaces du deuxième degré n'admet, sur la surface, que des sécantes doubles : car chaque génératrice de l'une des surfaces rencontre l'autre, et par suite la quartique, en deux points.

On sait que neuf points de l'espace pris sur une même quartique gauche de première espèce ne déterminent pas

une surface du second degré. Neuf points pris sur une courbe de deuxième espèce sont plus que suffisants pour déterminer la courbe, comme il est facile de le voir, et déterminent complètement une seule surface du deuxième degré.

II. — Les quartiques gauches de deuxième espèce peuvent s'obtenir comme intersection d'une surface du deuxième degré et d'une du troisième. Considérons sur une surface du troisième degré Σ deux droites A, B qui ne se rencontrent pas. Par ces droites je fais passer un hyperboloïde H ; H et Σ se couperont suivant les droites A, B et une courbe gauche du quatrième ordre C ; toute génératrice de H appartenant au système A, B rencontrera Σ et par suite C en trois points. Ces génératrices forment donc un système de sécantes triples. Les génératrices du système différent ne rencontrent C qu'en un point.

On peut en particulier prendre pour surface Σ un cône ayant pour génératrice double une génératrice de l'hyperboloïde H.

III. — Les quartiques de deuxième espèce sont unicursales. Car, si on fait passer un plan par une sécante triple, il ne rencontre plus la courbe qu'en un seul point, dont les coordonnées s'exprimeront par suite rationnellement en fonction d'un paramètre.

Si on projette la courbe sur un plan en plaçant le centre de projection sur une sécante triple, on obtient une quartique plane à point triple. Sur les autres rayons projetants il n'y a qu'un seul point de la courbe, ce qui montre autrement qu'elle est unicursale.

Voir CHASLES, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 250; CREMONA, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIII; SALMON, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. V; STEINER, *Journal de Crelle*, t. LIII.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1883

Mathématiques élémentaires.

Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD, connaissant la longueur l du côté oblique CD, l'aire a^2 du trapèze, et le volume $\frac{3}{4}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter des formules trouvées, et déterminer le minimum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a; \quad l = 3a.$$

Mathématiques spéciales.

D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné.

1° Démontrer que par les pieds de ses six normales, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde ;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution ;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S ;

4° Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre, ou un systèmc de deux plans parallèles.

Composition sur le programme de licence.

Théorie. — On donne un corps quelconque, dont les diverses parties sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et on admet, comme préalablement démontré, que les composantes de l'attraction exercée sur un point M,

ayant pour coordonnées x, y, z, sont représentées, à un facteur constant près, par les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ du potentiel V, relatif au point M. Prouver qu'on a toujours

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon,$$

ε étant la densité de la masse attirante au point de cette masse qui coïncide avec le point M.

Démontrer que toute fonction U qui, mise à la place de V dans l'équation précédente, satisfait à cette équation, ne diffère pas du potentiel V, si elle remplit en outre les conditions suivantes : 1° la fonction U est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre; 2° les produits

$$Ux,\ Uy,\ Uz,\quad x^2\frac{dU}{dx},\ y^2\frac{dU}{dy},\ z^2\frac{dU}{dz}$$

restent finis quand une ou plusieurs des variables x,y,z deviennent infinies, la masse attirante étant limitée.

Application. — Étant donné un ellipsoïde E, on sait qu'en chaque point de l'espace se coupent trois surfaces du second degré homofocales à E; désignons par λ, μ, ν, les demi-axes de ces surfaces parallèles au grand axe de l'ellipsoïde E. On considère une masse indéfinie douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et dont la densité en chaque point est exprimée par une fonction de λ, μ, ν. On demande quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que les surfaces de niveau soient des ellipsoïdes homofocaux à E. Cette forme étant trouvée, calculer l'attraction de la masse sur un point quelconque.

CONCOURS D'AGRÉGATION (1883)

Solution par M. Gérard, professeur au collège de Cluny.

D'un point donné P *on mène des normales à un ellipsoïde donné.*

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut

faire passer une infinité de surfaces du second ordre S *concentriques à l'ellipsoïde;*

2° *Trouver le lieu que doit décrire le point* P *pour que les surfaces* S *soient de révolution;*

3° *Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces* S;

4° *Sur la section de ce cône perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface* S *est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.*

I. — Soient X, Y, Z, les coordonnées du point P;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipsoïde.

Les coordonnées du pied d'une quelconque des normales doivent satisfaire aux relations

$$\frac{X - x}{x} a^2 = \frac{Y - y}{y} b^2 = \frac{Z - z}{z} c^2,$$

qui peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}(b^2 - c^2)yz + c^2Zy - b^2Yz = 0 \\ (c^2 - a^2)zx + a^2Xz - c^2Zx = 0 \\ (a^2 - b^2)xy + b^2Yx - a^2Xy = 0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Multiplions ces équations respectivement par a^2X, b^2Y, c^2Z, nous obtenons le résultat suivant:

$$a^2(b^2 - c^2)Xyz + b^2(c^2 - a^2)Yzx + c^2(a^2 - b^2)Zxz = 0; \qquad (3)$$

c'est l'équation d'un cône qui passe par les axes de l'ellipsoïde et par les six droites joignant le centre de cette surface aux pieds des normales. Ce résultat est bien connu et le cône que nous venons d'obtenir est, comme on le sait, celui qui a avec le cône de Chasles une génératrice commune et qui donne, par son intersection avec celui-ci, la cubique gauche aux pieds des normales issues du point P.

II. — D'après cela, l'équation générale des surfaces S est de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2\lambda Byz + 2\lambda B'zx + 2\lambda B''xy - 1 = 0; \qquad (3\ bis)$$

en posant
$$\left.\begin{aligned} A = \frac{1}{a^2},\quad A' = \frac{1}{b^2},\quad A'' &= \frac{1}{c^2} \\ B &= a^2(b^2 - c^2)X \\ B' &= b^2(c^2 - a^2)Y \\ B'' &= c^2(a^2 - b^2)Z \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Si aucun des coefficients B n'est nul, la condition pour qu'une des surfaces S soit de révolution est

$$A - \lambda \frac{B'B''}{B} = A' - \lambda \frac{B''B}{B'} = A'' - \lambda \frac{BB'}{B''},$$

d'où on tire

$$\lambda = \frac{(A - A')BB'}{B''(B'^2 - B^2)} = \frac{(A' - A'')B'B''}{B(B''^2 - B'^2)}$$

et par suite

$$(A' - A'')B'^2B''^2 + (A'' - A)B''^2B^2 + (A - A')B^2B'^2 = 0. \quad (5)$$

En remplaçant les coefficients A et B par leur valeur (4) on a l'équation du lieu du point P, savoir, après simplifications,

$$\frac{1}{a^2(b^2 - c^2)X^2} + \frac{1}{b^2(c^2 - a^2)Y^2} + \frac{1}{c^2(a^2 - b^2)Z^2} = 0 \quad (5\ bis)$$

C'est un cône du quatrième ordre que nous appellerons le cône V : il passe par les trois axes, et il est facile de voir que les points situés sur ces trois axes correspondent au cas où deux des coefficients des rectangles des variables sont nuls dans l'équation des surfaces S.

III. — L'équation des surfaces S étant mise sous la forme (3 *bis*) on sait que les équations de l'axe de révolution sont

$$\frac{x}{B'B''} = \frac{y}{B''B} = \frac{z}{BB'}; \quad (6)$$

portant dans l'équation (5), on a pour le lieu des axes de révolution

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

C'est un cône que nous appellerons le cône W. (7)

IV. — La section du cône W par le plan

$$z = 1$$

a pour équation

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right). \quad (8)$$

Si nous supposons $a > b > c$,
ce sont des hyperboles ayant pour axe transverse l'axe des y et pour axe imaginaire l'axe des x.

L'équation des surfaces S étant mise sous la forme (3 *bis*), on sait que la racine double de l'équation dite *équation en* S est

$$A' - \lambda \frac{BB'}{B''} = \frac{A''(B'^2B''^2 - B^2B''^2) - (A - A')B^2B'^2}{B'^2B''^2 - B^2B''^2} = S' = S''$$

c'est-à-dire, d'après les équations (6),

$$S' = S'' = \frac{\frac{1}{c^2}(x^2 - y^2) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)z^2}{x^2 - y^2}.$$

Comme la somme des trois racines de l'équation en S est $A + A' + A''$, la racine simple sera

$$A + A' + A'' - 2\left(A' - \lambda \frac{BB'}{B''}\right) = S'''$$

$$\text{ou } S''' = \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)(x^2 - y^2) - 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)z^2}{x^2 - y^2}.$$

On voit que les racines de l'équation en S ne varient pas lorsque x, y, z ou encore B, B', B'', varient proportionnellement. Si donc on se reporte aux expressions (4) des coefficients B, on verra :

1° Que la surface S reste la même quand le point P prend diverses positions sur une arête du cône V;

2° Que les cônes V et W se correspondent arête à arête.

D'après les valeurs de S', S'', S''' données ci-dessus, on voit que *les lignes séparatrices* sur la section (8) faite dans le cône V seront, en faisant $z = 1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2}(x^2 - y^2) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)(x^2 - y^2) - 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La première des lignes (9) rencontre la section (8) en quatre points M, M', M'', M''' dont les coordonnées sont

$$a^2x^2 = b^2y^2 = c^2;$$

La deuxième en quatre points N, N′, N″, N‴ qui ont pour coordonnées

$$x^2 = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}$$

$$y^2 = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Il est visible que le numérateur de ces deux fractions est toujours positif.

Si donc, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} > 0$,

les quatre points N seront réels.

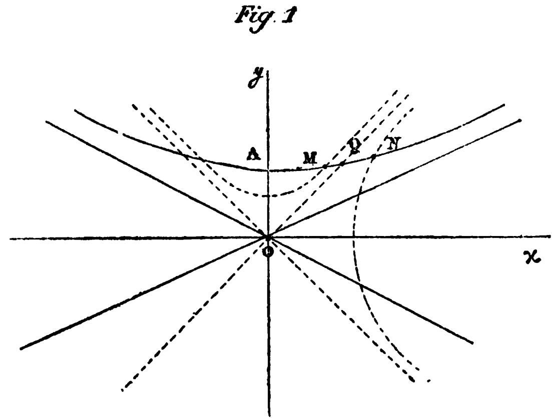
Et si $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0$,

ils seront imaginaires.

Enfin la troisième des lignes (9) rencontre la section (8) en quatre points Q, Q′, Q″, Q‴, qui ont pour coordonnées

$$x^2 = y^2 = 1.$$

Fig. 1



Donc

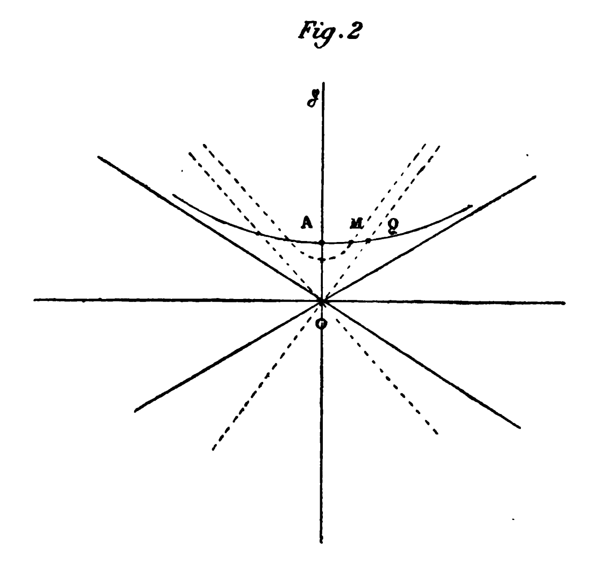
Premier cas. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} > 0.$

Marquons les douze points d'intersection et le sommet A (*fig. 1*) ; comme l'axe des y est réel pour la première courbe (9) et imaginaire pour la deuxième, les points se succéderont dans l'ordre A, M, Q, N.

On dressera donc le tableau suivant :

de A en M	$S' > 0$, $S''' > 0$	ellipsoïde ;
en M	$S' = 0$	plans parallèles ;
de M en Q	$S' < 0$, $S''' > 0$	hyperboloïde à deux nappes.
en Q	$S' = \infty$ $S'' = \infty$	cône ;
de Q en N	$S' > 0$, $S'' < 0$	hyperboloïde à une nappe ;
en N	$S'' = 0$	cylindre ;
de N à ∞	$S' > 0$, $S'' > 0$	ellipsoïde.

Fig. 2



DEUXIÈME CAS. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$

Le point N passe à l'infini (*fig. 2*) ;

de A en M $\left\{\begin{array}{l} S' > 0 \\ S'' > 0 \end{array}\right.$ ellipsoïde ;

en M $S = 0$ plans parallèles

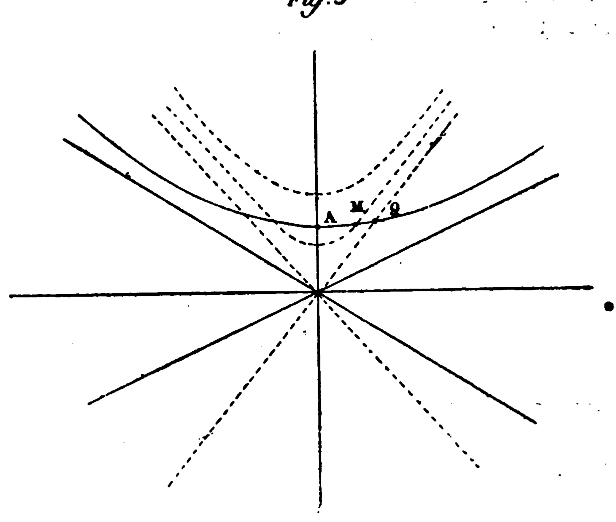
de M en Q $\left\{\begin{array}{l} S' < 0 \\ S'' > 0 \end{array}\right.$ hyperboloïde à deux nappes;

en Q cône ;

de Q à l'infini $\left\{\begin{array}{l} S' > 0 \\ S'' < 0 \end{array}\right.$ hyperboloïde à une nappe.

TROISIÈME CAS. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0.$

Fig. 3



La deuxième des courbes (9) a pour axe transverse l'axe des y et les points N deviennent imaginaires (*fig. 3*).

On a donc absolument le même tableau que dans le cas précédent.

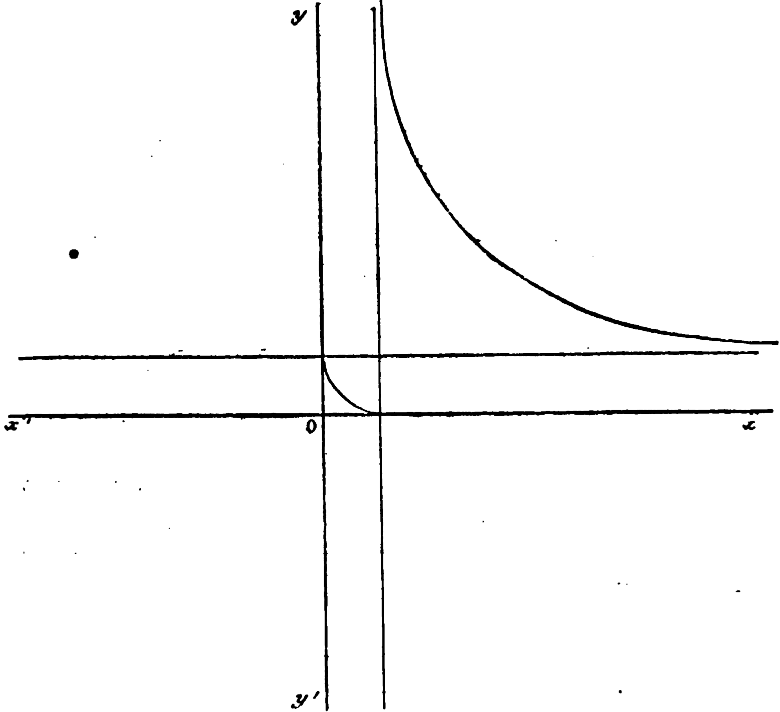
QUESTION 28

Solution par M. Alexandre, élève de mathématiques spéciales au Lycée d'Angers

Construire la courbe $Lx\,Ly = K$. (Laisant.)

On a
$$Ly = \frac{K}{Lx},$$
ou
$$y = e^{\frac{K}{Lx}}$$

Dans cette fonction on ne peut faire varier x que de o à $+\infty$ et y est toujours positif. Mais pour la valeur 1 de x, la



fonction n'est pas continue, on devra donc faire varier x de o à $1-\varepsilon$, puis de $1+\varepsilon$ à $+\infty$.

D'ailleurs la dérivée étant toujours négative, la fonction y décroît constamment.

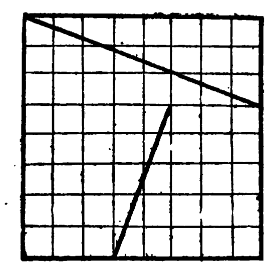
Pour $x = 0$, $y = 1$ et la tangente est Oy; x augmentant, y diminue; lorsque x est très voisin de 1, y approche beaucoup de O.

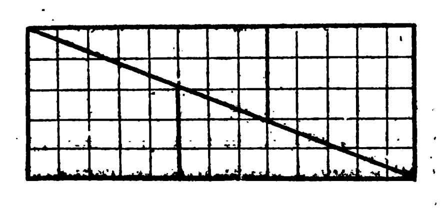
Pour une valeur de x un peu supérieure à 1, y est infini; la courbe revient de l'autre côté asymptote à $x = 1$, y diminue en même temps que x augmente. Et x augmentant indéfiniment, la courbe devient asymptote à $y = 1$.

VARIÉTÉS

UN PARADOXE GÉOMÉTRIQUE

Considérons un carré formé de 64 cases; divisons-le en deux rectangles ayant pour hauteur la hauteur du carré, et pour bases trois et cinq unités. Divisons le petit rectangle en deux parties pour une diagonale et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Si l'on découpe le carré en quatre





fragments, on peut les juxtaposer de manière à obtenir la figure (2); mais celle-ci contient 65 carrés, pendant que l'autre en contient 64. On aurait donc $65 = 64$. L'explication de ce paradoxe est facile. Nous avons supposé que les côtés des fragments placés le long de la diagonale du rectangle coïncidaient avec celle-ci; mais il n'en est pas ainsi, car ils laissent entre eux un espace vide équivalent à un carré. L'illusion résulte de la petite différence qui existe entre

l'inclinaison de la diagonale du rectangle des côtés 5 et 13 sur le grand côté et celle de la diagonale du rectangle des côtés 3 et 8 sur le grand côté. En effet, ces deux inclinaisons sont respectivement $\frac{5}{13}$ et $\frac{3}{8}$, dont la différence est

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{104}.$$

Les nombres 5, 8, 13 appartiennent à la série

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 . . .

que l'on obtient en ajoutant successivement deux termes consécutifs ; elle a été indiquée pour la première fois par Léonard Fibonacci de Pise, mathématicien du XIII[e] siècle. Dans cette série, le carré d'un terme quelconque, diminué du produit des termes qui le comprennent, est alternativement $+1$ et -1 ; ainsi

$$8^2 - 5.13 = -1$$
$$21^2 - 13.34 = -1$$
$$55^2 - 34.89 = -1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

On pourra donc remplacer le carré de 8 unités de côté par des carrés de 21 et 55 unités de côté, et l'on obtiendra des figures paradoxales d'approximation plus grande.

On a aussi
$$13^2 - 8.21 = +1$$
$$34^2 - 21.55 = +1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et l'on pourra employer des carrés de 13, 34 . . . cases de côté ; mais, afin de reproduire l'illusion précédente, il faut d'abord construire le rectangle et le découper, de telle sorte que l'intervalle vide se produise dans le carré.

Si l'on observe que cette série provient du calcul des réduites de la fraction continue la plus simple

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

on peut considérer ces découpages comme une représentation géométrique de la grande approximation donnée par

les fractions continues ; il serait donc facile de construire beaucoup de figures de ce genre.

QUADRATURE DU CERCLE

On sait que, pour obtenir la longueur d'une circonférence, il faut multiplier le diamètre par un nombre fini, que l'on désigne habituellement par π, et que, pour obtenir l'aire du cercle, il faut multiplier par π le carré du rayon. Archimède a donné le premier la valeur approchée

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

Mais on connaît depuis longtemps la valeur de π avec une très grande approximation. On a remplacé la méthode des périmètres d'Archimède et la méthode des isopérimètres de Descartes par des méthodes qui reposent sur l'emploi des séries. C'est ainsi que Leibnitz a donné la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

et que Machin a donné celle-ci :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right];$$

avec cette dernière formule, un géomètre anglais, M. W. Shanks, a calculé π avec *cinq cent trente* décimales.

On peut retenir facilement les trente premières décimales du nombre π au moyen du quatrain suivant :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages ;
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Si l'on écrit successivement le nombre de lettres de chaque mot, on trouve ainsi les trente premières décimales :

$$\pi = 3,14159 \quad 26535 \quad 89793 \quad 23846 \quad 26433 \quad 83274 \ldots;$$

mais nous n'engageons personne à continuer ce travail poé-

tique pour les 530 décimales du calcul de M. Shanks (*). Pour les usages ordinaires, quatre ou cinq décimales suffisent, nous donnerons comme exemple l'application suivante :

Connaissant le centre d'un rouleau de papier peint et le nombre des feuilles depuis le rayon jusqu'à la circonférence, déterminer la longueur du rouleau.

Si l'on désigne par l la longueur du rouleau, par r le rayon et par n le nombre des feuilles, on peut considérer approximativement le profil du rouleau comme un cercle de rayon r, qui a pour surface πr^2 ; d'autre part, si l'on développait le rouleau, le profil deviendrait un rectangle de longueur l et d'épaisseur $\frac{r}{n}$; on a donc

$$l \cdot \frac{r}{n} = \pi r^2;$$

d'où

$$l = \pi r n.$$

Le problème de la quadrature du cercle consiste à trouver par des constructions géométriques le côté d'un carré équivalent au cercle ayant l'unité pour rayon. Nous avons dit, dans notre premier volume (p. 167), que c'est un préjugé pour beaucoup de personnes de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature du cercle ; mais il n'en est plus de même actuellement.

Lambert a démontré, en 1761, que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable, il était aussi démontré que le carré de ce rapport est encore incommensurable (LEGENDRE, *Éléments de géométrie, note IV*). D'autre part, dans un admirable mémoire sur la fonction exponentielle, M. Hermite avait démontré en 1874 que le nombre e base du système des logarithmes népériens est un nombre transcendant, c'est-à-dire que le nombre e ne peut être la racine d'une équation de degré quelconque à coefficients entiers ou formés d'irrationnelles algébriques ; mais l'illustre géomètre écrivait, dans une lettre à M. Borchardt : « Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de

(*) D'autant que la trente et unième décimale est un zéro. (Note de la rédaction.)

la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise ; nul ne sera plus heureux que moi de leur succès ; mais croyez-moi, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter quelques efforts. »

En 1882, M. Lindemann annonçait à l'Académie des sciences qu'il était parvenu à démontrer la transcendance du nombre π, et qu'il avait déduit cette proposition des formules de M. Hermite. Sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, qui repose sur la liaison mystérieuse des nombres e et π, formulée par Euler :

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

La cinquième édition de l'excellent *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse contient le résumé et la simplification des formules de M. Hermite et des recherches de M. Lindemann ; M. Rouché ajoute que ce dernier travail si remarquable appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet au moins sous le rapport de la simplicité. N'est-ce pas le cas de répéter avec Bacon : « Nous n'arriverons à quelque chose de définitif qu'après avoir longtemps vécu de provisoire. Mais ce provisoire ne nous fascinera pas, nous saurons qu'il n'est pas notre dernier but et, dans les champs de la science, les plus hardis travailleurs n'oublieront pas qu'il faut d'abord faire une première vendange. »

Extrait des *Récréations mathématiques* de M. Ed. Lucas, t. II.)

QUESTIONS PROPOSÉES

77. — Étant donnée une ellipse, on décrit de l'un des foyers comme centre de F par exemple, une circonférence de rayon égal à l'ordonnée de ce point. Au point F correspond une directrice ; on prend la droite DD' symétrique de la directrice par rapport à F, et l'on mène du point F le rayon vecteur FIMM' rencontrant le cercle, l'ellipse et la droite DD' respectivement en I, M et M'. Prouver que

$IM.IM' = p^2$, p étant l'ordonnée du foyer. *(X. Antomari.)*

78. — Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. Désignons par A_1 la surface du triangle BCD, et par P_1 la puissance du point A par rapport à un cercle quelconque situé dans le plan du quadrilatère. Désignons de même par B_1 et P_2 les quantités analogues pour le point B, etc. Prouver que l'on a la relation $A_1P_1 - B_1P_2 + C_1P_3 - D_1P_4 = 0$.

Déduire de là les propriétés du quadrilatère inscriptible.

(X. A.)

79. — Un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est inscrit dans un cercle O. Soit O′ le cercle passant par A_1A_2 et tangent au côté A_1A_4. Le côté A_2A_3 rencontre ce cercle en un second point I. Prouver que l'on a

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4} = \frac{IA_3}{A_1A_4} \qquad (X. A.)$$

80. — p étant un nombre premier impair, et P un polynôme entier, à coefficients entiers, l'équation

$$(x + y)^p - x^p - y^p = pxy(x + y)P^2$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7, \qquad P = x^2 + xy + y^2. \qquad (Catalan.)$$

81. — Sommer

$$2^{n-2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3}2^{n-6} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9}{2.3.4.5}2^{n-10}$$

. . . .

et démontrer que si n est un nombre premier, les fractions

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}, \quad \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4.5}, \ldots$$

se réduisent à des nombres entiers. *(Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 20642-3.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite.* V. p. 193, 217.)

VII. Application aux fonctions U_n du second ordre. — Ces fonctions sont déterminées par l'équation de récurrence, $U_n - 2p\, U_{n-1} + q\, U_{n-2} = 0.$ (1)

Nous allons chercher l'intégrale U_n en appliquant, directement, notre méthode et sans admettre le théorème de Lagrange.

A cet effet, posons

$$U_n = V_n + \alpha^n. \qquad (2)$$

Nous avons, entre les fonctions V, la relation

$$V_n - 2p\, V_{n-1} + q\, V_{n-2} + \alpha^{n-2} (\alpha^2 - 2\alpha p + q) = 0.$$

Considérons l'équation

$$z^2 - 2pz + q = 0.$$

Nous supposerons $p^2 - q$, différent de zéro et nous désignerons par z_1 et z_2, les deux racines de cette équation. En prenant $\alpha = z_1$, ou $\alpha = z_2$, nous avons

$$V_n - 2p\, V_{n-1} + q\, V_{n-2} = 0.$$

Si nous posons (§ V)

$$U_n = AU_0 + BU_1,$$

nous avons aussi (§ V)

$$V_n = AV_0 + BV_1;$$

et, par suite,

$$U_n - V_n = A (U_0 - V_0) + B (U_1 - V_1).$$

La relation (2) permet d'écrire cette égalité de la manière suivante : $\alpha^n = A + B\alpha.$

Cette égalité est vérifiée : 1° pour $\alpha = z_1$; 2° pour $\alpha = z_2$.

Nous avons donc $z_1^n = A + Bz_1,$

$$z_2^n = A + Bz_2.$$

Si nous résolvons ces équations, par rapport aux incon-

nues A et B, nous obtenons

$$A = z_1 z_2 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}, \qquad B = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}.$$

Posons maintenant

$$T_n = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2};$$

nous avons, enfin,

$$A = -qT_{n-1}, \qquad B = T_n.$$

L'intégrale U^n est donc donnée par la formule

$$U_n = -qT_{n-1}U_0 + T_nU_1. \qquad (\alpha)$$

Cette formule est bien l'*intégrale générale*, car elle renferme deux constantes arbitraires U_0, U_1 et l'on peut vérifier que l'égalité précédente se réduit à une identité pour $n = 0$, et pour $n = 1$. L'expression de U_n se trouve ainsi donnée en fonction de T_n et de T_{n-1}. Ces fonctions T_n ont été étudiées, particulièrement, par M. Ed. Lucas et, avec les fonctions S_n,

$$S_n = z_1^n + z_2^n,$$

ont été nommées par lui *fonctions numériques simplement périodiques* (1).

En posant, $\Delta = 4(p^2 - q)$,

on trouve

$$T_n = \frac{n}{1} p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} p^{n-3}\Delta$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} p^{n-5}\Delta^2 + \ldots$$

D'après cette formule, démontrée par M. Ed. Lucas *(loc. cit.)*, l'expression de U_n, en fonction de p et de q, se trouve donnée, en utilisant l'égalité (α).

VIII. — Examen du cas des racines égales. — Il nous reste à considérer le cas particulier que nous avons réservé, celui où l'on suppose $p^2 - q = 0$.

On peut encore éviter le théorème de Lagrange et chercher directement l'intégrale U_n, comme nous allons le montrer.

L'équation proposée est alors

$$U_n - 2pU_{n-1} + p^2U_{n-2} = 0.$$

(1) *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877 ; p. 369.

Cette relation peut s'écrire

$$U_n - pU_{n-1} = p(U_{n-1} - pU_{n-2}).$$

Il est alors naturel de poser

$$U_n - pU_{n-1} = \rho_n,$$

et l'on a, $\rho_n = p\rho_{n-1}$.

Cette dernière égalité donne, par combinaison,

$$\rho_n = p^{n-1}\rho_1.$$

Nous avons donc le tableau suivant :

$$U_n - p\,U_{n-1} = \rho_n = p^{n-1}\rho_1,$$
$$U_{n-1} - p\,U_{n-2} = \rho_{n-1} = p^{n-2}\rho_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_1 - p\,U_0 = \rho_1 = p^0\rho_1..$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par

$$1,\ p,\ p^2,\ \ldots\ p^{n-1},$$

et ajoutons ces résultats, nous obtenons la relation

$$U_n - p^n\,U_0 = np^{n-1}\rho_1.$$

Si nous remarquons enfin que $\rho_1 = U_1 - p\,U_0$, nous avons finalement

$$U_n = p_n \left\{ U_0 + n\left(\frac{U_1}{p} - U_0\right)\right\}.$$

Nous allons maintenant, ces explications nécessaires étant données, aborder l'étude que nous avons en vue dans ce travail de fractions continues, d'une nouvelle espèce, représentant, comme les fractions continues ordinaires, les irrationnelles du second degré. Nous résumerons, assez fidèlement, ce que nous avons exposé jusqu'ici en faisant remarquer qu'il résulte de ce que nous venons de dire:

1° Que l'intégrale U_n, *des suites récurrentes proprement dites, peut toujours se calculer sans qu'on ait à résoudre l'équation génératrice et par le seul calcul de la fonction symétrique* S_n;

2° Que l'on peut trouver U *par une méthode directe élémentaire et qui évite la démonstration du théorème de Lagrange*;

3° Dans le cas où la fonction U_n *vérifie la relation de récurrence :* $U_n - 2p\,U_{n-1} + q\,U_{n-2} = 0$,

si l'on suppose $q = p^2$, *on a*

$$U_n = p^n \left\{ U_0 + n\left(\frac{U_1}{p} - U_0\right)\right\};$$

et si $q - p^2$ *est différent de zéro, on a*

$$U_n = - q\, T_{n-1}\, U_0 + T_n U_1;$$

en posant:

$$T_n = \frac{n}{1} p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3}\Delta + \ldots;$$

et $\Delta = 4(p^2 - q)$. *(A suivre.)*

NOTE SUR LES CUBIQUES

Par M. **H. Le Pont**, à Paris.

Étant donné un triangle ABC pris pour triangle de référence, l'équation $x^2y = z^3$ (1) représente une cubique Γ passant par les sommets A et B de ce triangle, et ayant pour tangente de rebroussement au point B le côté BC, $x = 0$; et pour tangente d'inflexion en A, le côté AC, $y = 0$.

Posons $x = \frac{z}{t}$, $y = t^2z$, (2) l'équation d'une droite passant par deux points t_1 et t_2 de la courbe, est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & t_1^2 & t_1 \\ 1 & t_2^2 & t_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$t_1t_2(t_1 + t_2)x - (t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)z + y = 0$$

et en supposant $t_1 = t_2$, cette équation devient celle de la tangente à la courbe au point t :

$$2t^3x - 3t^2z + y = 0. \qquad (3)$$

L'équation $2t^3x_0 - 3t^2z_0 + y_0 = 0$ (4) donne les valeurs de t correspondant aux trois tangentes que l'on peut mener à la cubique Γ par un point P (x_0, y_0, z_0) du plan.

L'équation aux t d'intersection de la cubique Γ avec une conique C

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0 \qquad (5)$$

est $a't^6 + 2bt^4 + 2b''t^3 + a''t^2 + 2b't + a = 0.$ (6)

Nous exprimerons que cette conique C passe par les points

de contact des tangentes issues du point P en identifiant l'équation (6) avec le produit

$$(2t^3x_0 - 3t^2z_0 + y_0)\,(t^3 + ut^2 + vt + w), \qquad (7)$$

ce qui donnera les relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x_0}{a'} &= \frac{2vx_0 - 3uz_0}{2b} = \frac{2wz_0 - 3vz_0 + y_0}{2b''} \\ &= \frac{uy_0 - 3wz_0}{a''} = \frac{vy_0}{2b'} = \frac{wy_0}{a} \\ & 2ux_0 - 3z_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

relations qui permettront de déterminer la nature de la conique C, suivant les données du problème proposé. En particulier, si nous voulons que les tangentes aux trois autres points d'intersection des courbes C et Γ concourent en un point Q (ξ, η, ζ) du plan, nous aurons

$$\begin{aligned} a &= -a''\frac{\eta y_0}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \quad a' = -a''\frac{4\xi x_0}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \\ b &= -a''\frac{3\zeta z_0}{2(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \quad b' = 0, \quad b'' = -a''\frac{\xi y_0 + x_0\eta}{3(\eta z_0 + y_0\zeta)}, \end{aligned} \qquad (9)$$

avec la relation $\zeta x_0 + z_0\xi = 0.$ (10)

et l'équation de la conique C s'écrira

$$\begin{aligned} &\eta y_0 x^2 + 4\xi x_0 y^2 - 3(\eta z_0 + y_0\zeta)z^2 + 9\zeta z_0 yz \\ &\quad + 2\,(\xi y_0 + x_0\eta)xy = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

I. — *Étant donnés deux points* $P(x_0, y_0, z_0)$ *et* $Q(\xi, \eta, \zeta)$ *dont les coordonnées satisfont à la relation*

$$\zeta x_0 + z_0\xi = 0,$$

on peut toujours déterminer une conique C *et une seule passant par les points de contact des six tangentes menées à la cubique* Γ *par les points* P *et* Q.

II. — *On peut toujours mener six coniques circonscrites au triangle de référence et tangentes à la cubique* Γ; *ces six coniques se coupent trois à trois en deux points* P *et* Q *d'une septième conique circonscrite au même triangle et dont les coordonnées* (x_0, y_0, z_0), (ξ, η, ζ) *satisfont à l'équation*

$$\zeta x_0 + z_0\xi = 0.$$

CONIQUES

PASSANT PAR TROIS DES QUATRE POINTS COMMUNS A DEUX CONIQUES DONNÉES

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Premier cas. — Le point laissé de côté est à distance finie. Nous le prenons pour origine. L'équation d'une des coniques qui y passent peut s'écrire $\alpha x + \beta y = 0$, α, β étant des fonctions linéaires données de x et y. Écrivons

$$x(\alpha + \lambda y) + y\,(\beta - \lambda x) = 0,$$

λ constante arbitraire. De même la seconde conique a pour équation, je suppose

$$x(\alpha' + \lambda' y) + y\,(\beta' - \lambda' x) = 0.$$

Pour que des valeurs de x et y, qui ne sont pas nulles à la fois, satisfassent à ces deux conditions, il faut et suffit qu'on ait $\quad (\alpha + \lambda y)(\beta' - \lambda' x) - (\alpha' + \lambda' y)(\beta - \lambda x) = 0.$

Cette équation représente une conique qui passe donc par les trois points, autres que l'origine, communs aux deux coniques données. Développée, elle renferme au premier degré seulement les constantes arbitraires λ et λ' ; donc on pourra faire passer la conique par deux autres points arbitraires. Nous avons l'équation générale des coniques passant par les trois points considérés.

Application. — Cercles passant par les pieds de trois normales menées d'un point P (α, β) à l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (axes rectangulaires).

Les pieds des quatre normales sont à l'intersection de l'ellipse et de

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Soit M $(x'y')$ l'un d'entre eux laissé de côté, on trouve, en appliquant la méthode précédente, ou, ce qui revient ici au même, en écrivant les deux équations ainsi:

$$\frac{x - x'}{a^2}(x + x') + \frac{y - y'}{b^2}(y + y') = 0.$$

$$- b^2 (x - x')(y - \beta - \frac{b^2}{a^2} y')$$

$$+ a^2 (y - y')(x - \alpha - \frac{b^2}{a^2} x') = 0;$$

l'équation du cercle cherché sous la forme

$$(x + x')\left(x - \alpha + \frac{b^2}{a^2} x'\right)$$

$$+ (y + y')\left(y - \beta - \frac{a^2}{b^2} y'\right) = 0.$$

On voit que ce cercle a pour quatrième point commun avec l'ellipse le point M' $(-x', -y')$ diamétralement opposé au pied M laissé de côté. (Théorème de Joachimsthal.) Son centre I a pour coordonnées $\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{c^2x'}{a^2}\right), \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{c^2y'}{b^2}\right)$. Pour le construire, soit Q le point qui se projette sur les axes aux points où ils sont rencontrés par la normale en M à l'ellipse; son symétrique par rapport à O étant Q', le point I est au milieu de PQ'. Le cercle est déterminé.

Il est aisé de vérifier que la parallèle menée de I à la normale en M passe par le point $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ milieu de OP', P' étant symétrique de P par rapport à O. Ce point est donc commun aux quatre droites ainsi obtenues. (Propriété indiquée par M. Laguerre.)

Enfin il est visible que pour que le cercle ci-dessus passe par le point M $(x'y')$, il faut et suffit que P soit le point de contact de la normale en M et de la développée. Mais cette condition donne $x'\left(\alpha - \frac{c^2x'}{a^2}\right) + y'\left(\beta + \frac{c^2y'}{b^2}\right) = 0$.

Donc pour construire l'extrémité du rayon de courbure en M, il suffit ayant tracé la normale en ce point qui coupe les axes en D, E, projections sur ces axes d'un point Q, d'abaisser de ce point Q une perpendiculaire sur le diamètre OM; elle rencontre la normale au point P cherché.

Deuxième cas. — Le point laissé de côté est à l'infini.

Supposons qu'il est dans la direction de l'axe des x, direction asymptotique commune.

Il suffit de rendre les équations homogènes et de remarquer qu'elles sont de la forme $\beta y + \gamma z = 0$, β, γ fonctions linéaires de x, y, z pour être ramené à un calcul tout semblable au premier.

Application au cercle passant par les pieds des trois normales menées d'un point à une parabole. — On vérifie qu'il passe encore par le sommet de la parabole.

REMARQUE. — Nous avons vu dans l'application du premier cas qu'il n'est pas indispensable de faire le changement d'origine. De même dans le second cas, si la direction asymptotique était $y = mx$ on pourrait écrire les équations sous la forme $\beta(y - mx) + \gamma z = 0$ de façon à éviter le changement d'axes.

NOTE

SUR LA MANIÈRE D'ÉCRIRE $(x + h)^m$ SOUS FORME DE DÉTERMINANT

Par M. **Marchand**, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Le développement du binôme pour des puissances entières peut se mettre sous la forme d'un déterminant à l'aide des considérations des plus élémentaires, empruntées à la théorie de la division algébrique.

Cette dernière nous donne l'identité

$$(x + h)^{m+1} - x^{m+1} = h(x + h)^m + h(x + h)^{m-1}x$$
$$+ h(x + h)^{m-2} x^2 \ldots\ldots + h(x + h)x^{m-1} + hx^m.$$

qu'on peut écrire

$$(x + h)^{m+1} - h(x + h)^m - h(x + h)^{m-1} x - h(x + h)^{m-2} x^2$$
$$\ldots\ldots - h(x + h)y^{m-1} = x^{m+1} + hx^m.$$

Donc en attribuant à m la série des valeurs entières comprises de 0 à m, et remplaçant pour simplifier l'écriture $x + h$ par ξ, on obtiendra les $(m + 1)$ relations linéaires en

$\xi^{m+1}, \xi^{m}, \ldots$ etc. ξ,

$$\begin{aligned}
\xi^{m+1} - h\xi^{m} - hx\,\xi^{m-2} - hx^{2}\xi^{m-2} \ldots\ldots - hx^{m-1}\xi &= x^{m+1} + hx^{m}\\
\xi^{m} - h\,\xi^{m-1} - hx\,\xi^{m-2} \ldots\ldots - hx^{m-2}\xi &= x^{m} + hx^{m-1}\\
\xi^{m-1} - h\,\xi^{m-1} \ldots\ldots - hx^{m-1}\xi &= x^{m-1} + hx^{m-2}\\
\xi^{2} - h\xi &= x^{2} + hx\\
\xi &= x + h,
\end{aligned}$$

que l'on peut considérer comme formant un système d'équations simultanées.

Le déterminant du système ayant évidemment l'unité pour valeur, on pourra écrire.

$$(1)\ \xi^{m+1} = (x+h)^{m+1} = \begin{vmatrix}
x^{m+1} + hx^{m} & -h & -hx \ldots & -hx^{m-1}\\
x^{m} + hx^{m-1} & 1 & -h \ \ldots & -hx^{m-2}\\
x^{m+2} + hx^{m-2} & 0 & 1 \ \ldots & -hx^{m-3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x^{1} + hx & 0 & 0 \ \ldots 1 & -h\\
x + h & 0 & 0 \ \ldots 0 & 1
\end{vmatrix}$$

ou encore, en remarquant que le déterminant que nous venons d'écrire est divisible par $x + h$,

$$(2)\ (x+h)^{m} = \begin{vmatrix}
x^{m} & -h & -hx & \ldots\ldots & -hx^{m-1}\\
x^{m-1} & 1 & -h & \ldots\ldots & -hx^{m-2}\\
x^{m-2} & 0 & 1 & \ldots\ldots & -hx^{m-3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
x & 0 & 0 & \ldots\ldots 1 & -h\\
1 & 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & 1
\end{vmatrix}$$

qui répond à la question que nous nous sommes posée.

Première Remarque. — Prenant cette formule (2) *à priori*, il serait facile de démontrer qu'elle donne bien la valeur de $(x+h)_m$; il suffirait pour cela de retrancher la dernière colonne de la première; car on mettrait alors en évidence un facteur $x+h$, en ramenant le déterminant (2) à une forme identique à celle qu'il a dans la relation (1); de proche en

proche en abaissant l'ordre du déterminant d'une unité, au fur et à mesure qu'on mettraitun facteur $(x + h)$ en évidence, on arriverait donc à le ramenerà la valeur $(x + h)^m$.

Deuxième Remarque. — Il est clair que si on remplace dans cette formule h par $-h$, ce qui revient à changer les signes de tous les termes situés à droite de la diagonale allant de l'extrémité supérieure gauche à l'extrémité inférieure droite, c'est le développement de $(x - h)^m$ que l'on obtiendra.

Nous laissons maintenant aux jeunes lecteurs de ce journal le soin de tirer, de cette formule, les résultats intéressants qu'elle comporte à première vue, et notamment la forme qu'elle permet de donner aux puissances entières des nombres entiers, ou encore au développement de $\cos^m x$ et $\sin^m x$, en fonction de puissances imaginaires du nombre e et de $\cos^m x$ et $\sin^m x$ en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

ÉCOLE CENTRALE (PREMIÈRE SESSION 1883)

Géométrie analytique.

On donne deux axes Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy :

1° Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles, Oy soit la corde des contacts des tangentes menées du point A, et Ox la corde des contacts des tangentes menées du point B.

2° Trouver le lieu des points de rencontre de chacune de ces paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point H donné sur Oy.

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu et on cherchera comment doit être placé le point H, pour que ce lieu se réduise à des droites.

3° Déterminer le paramètre variable que renferme l'équa-

tion générale du n° 1, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné P, et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point P, pour que le problème soit possible.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris, savoir : $a = 4326^m,829$
$b = 7843^m,435$
$C = 123^\circ\, 7'\, 43'',2.$

Calculer A, B, c et l'aire du triangle.

Physique.

Un thermomètre renferme à 0°, jusqu'au point A, un poids P de mercure et un cylindre B en fer, de poids P'; cet appareil étant porté dans une enceinte de température x, inconnue, le liquide s'élève jusqu'au point C. La tige a été divisée préalablement, au-dessus du point A, en parties d'égale capacité v, jaugées à 0°; l'intervalle AC comprend n de ces divisions.

D et D' sont les densités à 0° du mercure et du fer.

f et k sont les coefficients de dilatation cubique du fer et du verre; m est le coefficient de dilatation cubique absolue du mercure.

Quelle est la température X de l'enceinte?

Exemple numérique :

	Mercure	Fer
$n = 266$	$P = 197^g,1$	$P' = 180^g,2$
$v = 0^{cc},0013$	$D = 13,59$	$D' = 7,8$
$k = 0,000025$	$m = 0,00018$	$f = 0,000035$

Chimie.

1° Indiquer sommairement les préparations usuelles du chlore dans les laboratoires et dans l'industrie, et donner les formules qui les représentent.

2° Calculer le volume du chlore (mesuré à la température 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure) nécessaire pour trans-

former en acide sulfurique, en présence de l'eau, 10 litres d'acide sulfureux (mesuré à la température de 0° et, à la pression de 0m,760 de mercure).

	Equivalents en poids	Equivalents en volume	Densités
Cl	35,5	2	2,46
SO^2	32	2	2,22

Poids d'un litre d'air : 1g293 mesuré à la température de 0° et sous la pression de 0m,760 de mercure.

Épure.

Hyperboloïde de révolution à une nappe, entaillé par quatre cônes.

L'hyperboloïde a son axe (z,z') vertical à 0m,110 du plan vertical et au milieu de la feuille; sa trace horizontale Θ touche la ligne de terre; la cote de son centre est 0m,103 et ses génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal. Les quatre cônes sont parallèles au cône asymptote de l'hyperboloïde; leurs sommets, projetés horizontalement aux extrémités (s_1, s_2, s_3, s_4) de deux diamètres du cercle Θ respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre, ont pour cote commune 0m,80.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie de l'hyperboloïde, supposé plein et opaque, qui, placée à l'extérieur des quatre cônes, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et le plan bissecteur du dièdre antérieur supérieur.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des différentes lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Tronc d'hyperboloïde entaillé par des cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,250 du petit côté inférieur.

ÉCOLE CENTRALE (2e SESSION 1883)

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, un rectangle ABCD et un point quelconque P; par ce point, on mène une droite de direction arbitraire PR; des quatre sommets du rectangle on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ sur cette droite.

Ceci posé, on demande de démontrer :

1° Que, parmi toutes les droites PR, issues du point P, il en existe une, PR′, pour laquelle la somme r^2 des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre, PR″, pour laquelle cette somme est minima;

2° Que les deux droites PR′ et PR″ sont rectangulaires;

3° Que le lieu des points P, pour lesquels le maximum de r^2 conserve une valeur donnée μ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR′. — Que, de même, le lieu des points P, pour lesquels le minimum de r^2 conserve une valeur donnée λ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR″;

4° Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres μ^2, λ^2. Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des deux dimensions du rectangle s'annulerait.

Trigonométrie.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés, savoir :

$$a = 4528^m,74$$
$$b = 3254^m,67$$
$$c = 3121^m,54.$$

Épure.

On donne un carré, dont le centre est à $0^m,110$ des deux plans de projection, dont les diagonales $(bd, b'd')$ $(ac, a'c')$ ont $0^m,088$ de longueur, et sont respectivement verticale et parallèle à la ligne de terre. Dans le plan de ce carré, du point cc' comme centre, avec un rayon égal au côté du carré, on trace un cercle ; ce cercle, en tournant autour de la diagonale verticale $(bd, b'd)'$, engendre un tore, et le côté $(bc, b'c')$ prolongé engendre, en tournant autour de $(ad, a'd')$, un cylindre.

On demande de représenter la partie, supposée opaque, de la *surface* du tore comprise dans le cylindre.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions relatives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et au cylindre et de la tangente à cette ligne.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie Descriptive.

Titre intérieur : Surface d'un tore comprise dans un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,230$ du petit côté supérieur, et l'axe du tore au milieu de la feuille.

Physique.

Un récipient de volume invariable renferme de l'air sec comprimé. On laisse échapper, par un robinet, une partie du gaz ; par suite de cette détente, le gaz restant se refroidit et prend la température t. On ferme alors le robinet et on observe, au même moment, la pression h donnée par un manomètre qui communique avec l'intérieur du récipient. Lorsque l'air qui reste dans le récipient est revenu à la température ambiante T, on observe la pression H donnée par le manomètre. — Calculer la température t.

On appliquera la formule obtenue aux données particulières suivantes :

T, température ambiante $= 20°$.

h, pression à la fermeture du robinet $= 0^m,800$ de mercure.

H, pression finale $= 0^m,8587$ de mercure.

α, coefficient de dilatation de l'air $= 0,00367$.

Chimie.

1° Préparation du phosphore à l'aide des os ; sa purification ; sa transformation en phosphore rouge.

2° Combien faut-il employer de litres d'oxygène sec, à la température de 15° et à la pression de $0^m,745$ de mercure, pour obtenir 50 grammes d'acide phosphorique anhydre par la combustion du phosphore.

Équivalents en poids, du phosphore : 31 ; de l'oxygène : 8. Densité de l'oxygène à la température de 0° et à la pression de $0^m,760$ de mercure : 1,1056.

Coefficient de dilatation de l'oxygène : $\alpha = 0,00367$.

QUESTION 37

Solution par M. CALLÉ, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On considère une parabole P, *et sur cette courbe un point* C. *Soit* N *la normale en ce point.* *1° Trouver sur cette normale un point* D, *tellement choisi que le cercle* S *décrit de* D *comme centre avec* DC *pour rayon rencontre* P *en deux points* A *et* B, *en ligne droite avec* D.

2° Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde AB *est constante quand le point* C *se déplace sur la courbe* P.

3° Équation générale de la droite AB. *Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.*

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. *Expliquer cette coïncidence.*

5° Aux cercles S *on mène des tangentes parallèles à la droite*

AB. *Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur* 4 p, *dans la direction positive de son axe.* (G. L.)

1° L'équation de la normale en fonction du coefficient angulaire est : $y + pm = m\left(x - \frac{pm^2}{2}\right)$.

Le coefficient angulaire de la tangente à la parabole, au pied de la normale, étant $-\frac{1}{m}$, celui de la corde AB sera $\frac{1}{m}$. Donc, le point D se trouvera à l'intersection de la normale et du diamètre conjugué de la direction $\frac{1}{m}$:

$$y - pm = 0.$$

Les coordonnées du point D sont donc : $\begin{cases} x = \dfrac{p(4 + m^2)}{2}, \\ y = pm. \end{cases}$

2° L'équation de la droite AB, est

$$2x - 2my - p(4 - m^2) = 0.$$

Les ordonnées des points d'intersection de la parabole et de la droite AB sont données par l'équation

$$y^2 - 2pmy - p^2(4 - m^2) = 0,$$

d'où l'on tire $y' - y'' = 4p,$

ce qui montre que le segment parabolique qui a pour corde AB, est bien de surface constante et égale à $\frac{16p^2}{3}$.

3° Pour avoir l'enveloppe de la droite AB, éliminons m entre l'équation de la droite et $y = pm$, équation donnée par sa dérivée prise par rapport à m.

On a ainsi pour l'enveloppe demandée

$$y^2 = 2p(x - 2p),$$

ce qui représente une parabole égale à la première.

4° Le lieu du point D s'obtient en éliminant m entre

$$y = pm \text{ et } x = \frac{p(4 + m^2)}{2}.$$

Le lieu est le même que le précédent.

Ce résultat pouvait être prévu: car l'enveloppe d'une corde déterminant sur une courbe un segment de surface constante, n'est autre chose que le lieu du milieu de la corde.

5° Cherchons la longueur de AB, on a

$$y' - y'' = 4p;$$

mais de l'équation de la droite on tire

$$x' - x'' = m(y' - y'') = 4pm,$$

d'où $$\delta^2 = 16p^2(1 + m^2).$$

L'équation du cercle S est donc

$$(y - pm)^2 + \left(x - \frac{p + 4m^2}{2}\right)^2 = 4p^2(1 + m^2).$$

Le lieu s'obtiendra donc en éliminant m entre l'équation du cercle et celle d'une perpendiculaire à AB menée par le point D : $$y - pm = -m\left(x - \frac{p(4 + m^2)}{2}\right)$$

d'où l'on tire $$x - p\,\frac{4 + m^2}{2} = \frac{y - pm}{m}.$$

Portons cette valeur dans l'équation du cercle; on obtient

$$(y - pm)^2 = 4p^2m^2,$$

ce qui se dédouble en

$$y = 3pm, \quad y = -pm,$$

d'où $$m = \frac{y}{3p}, \quad m = -\frac{y}{p}.$$

Portons successivement ces valeurs dans l'équation de la perpendiculaire. On obtient pour le lieu demandé les deux paraboles $$y^2 = 18px; \quad y^2 = 2p(x - 4p).$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Kauffmann, à Bordeaux.

Seconde solution par M. L. JACOB, à Lorient.

On considère une parabole P *et sur cette courbe un point* C. *Soit* N *la normale en ce point.*

1° Trouver sur cette normale un point D *tellement choisi que le cercle* S *décrit de* D *comme centre avec* DC *pour rayon rencontre* P *en deux points* A *et* B *en ligne droite avec* D.

Soit CF la normale en C; CT la tangente au point C et TX

l'axe de la parabole donnée(*). Supposons le problème résolu et soit CAB le cercle cherché ; la droite AB d'après une propriété connue du cercle fait avec TX un angle égal à XTC, le point D étant le milieu de AB se trouve sur le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB, d'où la construction suivante.

Posez le point C′ symétrique de C par rapport à l'axe et par le point C′ menez C′D parallèle à l'axe, son intersection avec la normale donne le point D.

Remarque. — La sous-normale EF étant égale à p, la droite C′D a pour longueur $2p$.

2° *Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde* AB *est constante quand le point* C *se déplace sur* P.

Par les points A et B menons AA′ et BB′ parallèles à l'axe; on sait que l'aire du segment AC′B est les deux tiers de l'aire AA′BB′. On a donc

$$S = \frac{2}{3}\,AA'BB' = \frac{4}{3}\,AA'C'D = \frac{8}{3}\,AC'D.$$

Or les triangles C′AD, C′CD sont entre eux comme leurs hauteurs, donc

$$\frac{C'AD}{C'CD} = \frac{AD \sin\alpha}{CD\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

α désignant l'angle de la tangente en C avec TX, et remarquant que $AD = CD;$

d'ailleurs on a $C'D = 2p. \quad CC' = 2y,$

donc $C'CD = 2py,$

$$C'AD = 2py \operatorname{tg}\alpha.$$

Or $y \operatorname{tg}\alpha = p$, comme le montre le triangle CEF, donc

$$C'AD = 2p^2,$$

par suite $S = \frac{16}{3}p^2.$ C. Q. F. D.

3° *Équation générale de la droite* AB. *Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.*

L'équation de la tangente A′B′ peut s'écrire

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

et le point D étant tel que $C'D = 2p$, l'équation de la droite sera

$$y = m(x - 2p) + \frac{p}{2m},$$

l'enveloppe de cette droite est exactement la parabole

$$y^2 = 2p(x - 2p) \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir les résultats précédents dans le cas de l'ellipse.

1° Soit D le point cherché sur la normale CN, la corde DAB passant par ce point est avec la tangente CT également inclinée sur les axes de la conique ; pour avoir le point D il faut donc avoir précédemment déterminé les cordes conjuguées des cordes parallèles à AB, ce qui se fait en prenant le point C' symétrique de C et joignant OC'.

2° Cherchons le lieu du point D. Soit m le coefficient angulaire de la normale en C; cette normale a pour équation

$$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}};$$

le coefficient angulaire de la droite AB étant $\frac{1}{m}$, le diamètre CC' a pour équation

$$b^2 x + \frac{1}{m} a^2 y = 0$$

et le lieu du point D s'obtient en éliminant m entre ces deux équations :

$$m = -\frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad y = -\frac{a^2 y}{b^2} - \frac{c^2 \frac{a^2 y}{b^2 x}}{\sqrt{a^2 + b^2 \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}}}$$

$$y^2 \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^4} = \frac{c^4 a^2 y^2}{a^2 b^4 x^2 + b^2 a^4 y^2}$$

ou bien

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = \frac{c^4 a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2};$$

d'où il suit que le lieu est une ellipse homothétique de l'ellipse donnée et que par suite AB est la tangente en D à cette ellipse.

3° Cherchons la variation de l'aire du segment AC'B. Soient AMB, A_1MB_1 deux positions voisines du segment AB; on a en désignant par ΔS l'accroissement de l'aire

$$\Delta S = BMB_1 - AMA_1 = \frac{1}{2} \sin M \left\{ BM \cdot B_1M - AM \cdot A_1M \right\}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} AM \cdot A_1M \left\{ \frac{BM}{AM} \cdot \frac{B_1M}{A_1M} - 1 \right\}$$

Or à la limite les points M, I et I_1 coïncident, on a donc

$$\frac{AM}{BM} = 1 \qquad \frac{B_1M}{A_1M} = 1 \qquad \text{d'où} \quad \Delta S = 0,$$

l'accroissement de l'aire étant nulle, *l'aire est constante.*

On voit que l'on peut retrouver ce théorème bien connu :

Théorème. — *Si une sécante mobile roule sur une conique homothétique et concentrique d'une conique donnée, elle détermine sur cette dernière un segment dont l'aire est constante.*

4° *Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. Expliquer cette coïncidence.*

En effet, soient $x'y'$ les coordonnées du point D, x et y celle du point C', on a $\quad y = y' \qquad x' = x + 2p,$

comme $\quad y^2 = 2px,$

on a $\quad y'^2 = 2p(x' - 2p),$

ce qui démontre la proposition.

Pour expliquer ce fait, remarquons que le segment ACB est d'aire constante, soit I le point où la droite AB touche son enveloppe et A_1B_1 une position voisine de AB d'après la propriété des enveloppes, à la limite, A_1B_1 passera par le point I et l'on aura

$$\text{aire } AA_1I = \text{aire } BB_1I.$$

Or on aura $\quad \text{aire } AA_1I = \dfrac{AI \times A_1I}{2} \sin AIA'_1$

$$\text{aire } BB_1I = \frac{BI \times B_1I}{2} \sin BIB'_1;$$

d'où $\quad AI \times A_1I = BI \times B_1I, \quad \dfrac{AI}{BC} = \dfrac{B_1I}{A_1I}.$

Soit I_1 le point où A_1B_1 touche son enveloppe; à la limite, le point I se confond avec I_1, et

$$\frac{A_1I}{B_1I} = \frac{A_1I_1}{B_1I_1},$$

donc
$$\frac{AI}{BI} = \frac{B_1I_1}{A_1I_1};$$

de même
$$\frac{B_1I_1}{A_1I_1} = \frac{A_2I_2}{B_2I_2} \text{ etc.}, = c.$$

Considérons la position de la droite AB, laquelle est perpendiculaire à l'axe, on a alors évidemment

$$\frac{A'I}{B'I} = 1;$$

on aura donc
$$\frac{AI}{BI} = 1 = \frac{B_1I_1}{B_1I_1},$$

donc $AI = BI$, $B_1I_1 = A_1I_1$, etc. C. Q. F. D.

5° *Aux cercles S on mène des tangentes parallèles à la droite* AB. *Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur* 4p, *dans la direction positive de son axe.*

Menons par le point D une perpendiculaire MD à AB et portons sur cette perpendiculaire des longueurs DM et DN égales à DA, il faut trouver le lieu des points M et N. Or la droite DM est normale en D à la parabole P', lieu du point D, laquelle est égale à la parabole donnée; d'ailleurs le point D est placé sur cette parabole comme le point C sur la parabole P. : donc le lieu du point M est par rapport à P' le même que celui de D par rapport à P, c'est donc la parabole
$$y^2 = 2p(x - 4p). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour avoir le lieu du point N, désignons par x et y ses coordonnées, par $x'y'$ celles D, par x_0y_0 celles de M; on a

$$2y' = y_0 + y, \qquad 2x' = x_0 + x,$$
$$y'^2 = 2p(x' - 2p), \qquad y_0^2 = 2p(x_0 - 4p);$$

d'ailleurs, d'après notre remarque à la question 1,

$$x_0' - x' = 2p;$$

donc
$$\begin{cases} x' = x + 2p, & y'^2 = 2px \\ x_0 = x + 4p, & y_0^2 = 2px \end{cases}$$

d'où l'on conclut $y' = \pm y_0$. On sait d'après la position de la figure que l'on doit prendre $y' = y_0$, donc $y = 3y'$ et il vient

$$\frac{y^2}{9} = 2px, \qquad y^2 = 18px,$$

parabole de paramètre $9p$. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (Mathématiques spéciales), par *E. Jurisch*, professeur à l'École Colbert. — Paris, Librairie Delagrave.

M. Jurisch vient de continuer la publication de son Cours de Géométrie Descriptive en faisant paraître un recueil de questions, destinées aux élèves de Mathématiques Spéciales. Ces problèmes sont pris exclusivement parmi les questions d'examen données à l'École Centrale et à l'École Polytechnique; à ce point de vue, elles seront intéressantes pour les élèves, auxquels elles fourniront de très bons exercices préparatoires à l'examen.

L'auteur fait comprendre aux élèves comment on applique les théories du cours à la résolution d'une épure et quels sont, par ordre, les différents points qu'il faut déterminer: ce livre est donc un complément des cours de Géométrie Descriptive aussi utile, sinon plus, que les recueils bien faits de problèmes pour les autres parties du cours.

Mettant à profit les connaissances que les élèves de Mathématiques spéciales ont en Géométrie Analytique, M. Jurisch leur montre comment ils peuvent, par le calcul, vérifier au besoin les résultats que le dessin leur a signalés.

Nous croyons que les élèves sérieux tireront un réel avantage de ce recueil de questions, et nous souhaitons vivement que l'auteur nous donne prochainement un recueil de problèmes destinés aux élèves des classes de Mathématiques Élémentaires, qui ont un si grand besoin de comprendre la Géométrie Descriptive, et de voir comment les problèmes que l'on étudie au cours servent à la solution d'une question qui peut souvent avoir une grande importance pour eux, à cause des examens.

A. M.

CORRESPONDANCE

La solution de la question 28, par M. Alexandre, publiée dans le numéro d'octobre 1883, est très exacte, mais incomplète. Il faudrait effectivement examiner aussi le cas où le second membre est négatif, ce qui change complètement la forme de la courbe.

Je recommande particulièrement à vos lecteurs le rapprochement entre les deux courbes,

$$LxLy = + K, \quad LxLy = - K,$$

qui présentent l'une et l'autre deux points d'arrêt. Lorsqu'on les réunit toutes deux, ce qui donne la courbe $(LxLy)^2 = K^2$, on les *soude* en quelque sorte l'une à l'autre, et les points d'arrêt disparaissent ainsi.

LAISANT.

QUESTIONS PROPOSÉES

82. — Soient A, B, C, trois points pris sur une ellipse de foyer F, et distants de ce point respectivement de α, β, γ. Il existe sur la courbe un quatrième point D tel que l'on ait

$$d(a\alpha^2 - b\beta^2 + c\gamma^2) - (a\alpha - b\beta + c\gamma)^2 = a,$$

a désignant la surface du triangle BCD, b celle du triangle CDA, etc. Trouver ce point. *(X. Antomari.)*

83. — Étant donné un quadrilatère, on joint un point quelconque I de son plan à un autre point F, également quelconque dans le même plan, et l'on projette les quatre sommets du quadrilatère sur IF. On multiplie ensuite la distance du point I à la projection de l'un des sommets, par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets. Prouver que la somme des produits relatifs à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres. *(X. A.)*

84. — On donne une ellipse ayant pour foyers F et F′, et un point $P(\alpha, \beta)$. Par le point P, on mène les tangentes PM et PM′ à la courbe, puis on mène les normales en M et M′. Ces normales coupent PF et PF′ aux points A, B, C, D. Le quadrilatère ABCD ainsi obtenu est inscriptible. — 1° Trouver l'équation du cercle circonscrit (C). — 2° A chaque point P correspond un cercle (C); on mène à l'un de ces cercles les tangentes Fm et $F'm'$. Calculer le rapport $\dfrac{Fm}{F'm'}$. — 3° Que devient le cercle (C) quand le point P décrit le

cercle circonscrit à l'ellipse? Quand il décrit le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, a et b étant les demi-axes de la courbe? — 4° Trouver le lieu géométrique des points P pour lesquels le cercle (C) passe par un point donné; cas où le point est l'un des foyers. — 5° Trouver l'enveloppe des cercles (C) quand le point P décrit l'une des tangentes aux extrémités du grand axe. *(X. A.)*

85. — On considère un cercle C rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. Soient A, A′, deux tangentes parallèles fixes, et PMQ, une tangente mobile, ayant M pour point de contact et rencontrant A en P, A′ en Q : 1° sur MP et MQ comme diamètres, on décrit des cercles ; le lieu décrit par le centre de similitude de ces circonférences est une quartique unicursale. — 2° Soit B le point de contact de A avec C; la droite BM rencontre le cercle décrit sur PQ comme diamètre en des points dont le lieu est une cubique.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 23068-8.

THÉORIE DE L'INVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

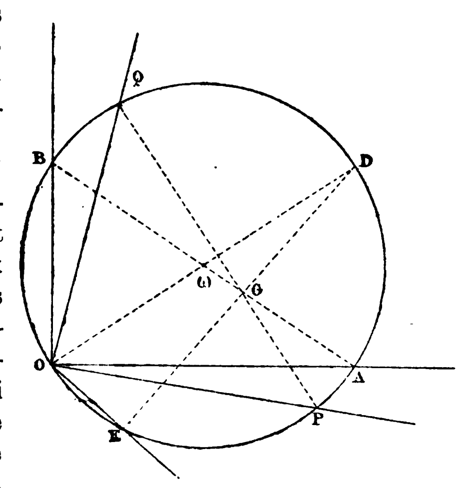
Par M. E. Vazeille.

(Suite, voir p. 121 et 169.)

Nous allons indiquer maintenant quelques applications de la théorie de l'Involution aux courbes du second ordre.

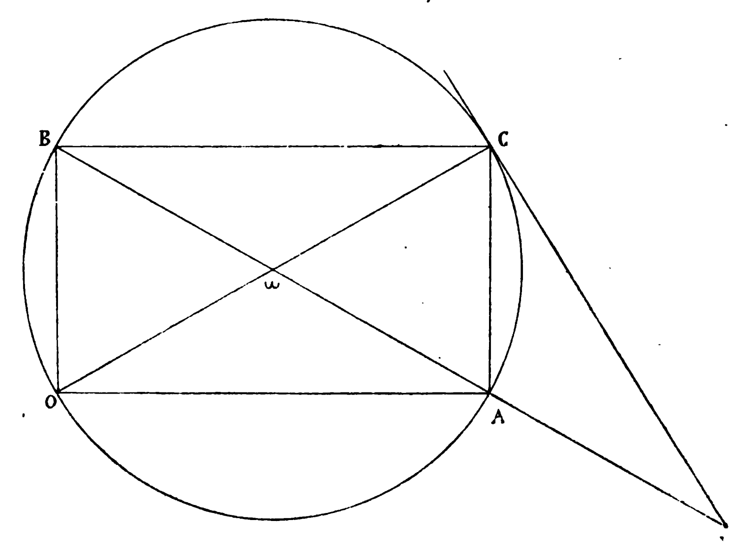
Problème. — *Construire un système de diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné.*

(a) Cas de l'ellipse. — Soient OA et OB les demi-axes de l'ellipse ; et décrivons sur AB comme diamètre une circonférence, puis construisons le rect ngle OADB, et le point D′ symétrique de D′ relativement à OA ; OD et OD′ sont les deux diamètres conjugués égaux ; ils déterminent sur la circonférence la corde DE qui vient couper, à angle droit, en G la corde diamétrale AB; toutes les cordes qui sous-tendent un système de diamètres conjugués passeront par le point G, d'après un théorème précédemment démontré; en conséquence inscrivez dans le cercle une corde qui soit vue du centre ω de ce cercle sous un angle 2θ, les extrémités P et Q de cette corde jointes au point O feront entre elles un angle θ ; et si cette corde passe au point G, ce seront deux diamètres conjugués de l'ellipse; et ils feront entre eux l'angle θ; or toutes les cordes qui sont vues du centre ω du cercle sous un angle 2θ sont tan-



gentes à une circonférence décrite du point ω comme centre; et le problème sera possible tant que le point G sera extérieur à cette circonférence auxiliaire; et la limite de possibilité du problème sera atteinte, lorsque la circonférence auxiliaire passera par le point G; à cet état limite, les deux solutions que comporte le problème pour une valeur quelconque de θ, coïncideront entre elles, en produisant les deux diamètres conjugués égaux OD et OE'; ainsi se trouvent établis très simplement les théorèmes sur la variation de l'angle θ dans l'ellipse.

(b) Cas de l'hyperbole. — Soient OA le demi-axe transverse, et OB le demi-axe non transverse; décrivez la circonférence



sur AB comme diamètre; la corde AB et la tangente en C se couperont au point fixe fondamental I; et l'on continuera comme pour l'ellipse; mais ici le point I est extérieur à la circonférence ω, et le problème a deux solutions toujours réelles pour toute valeur de l'angle θ.

Problème. — *Étant données deux coniques concentriques, déterminer le système de diamètres conjugués commun aux deux coniques.*

D'après une remarque faite précédemment, le problème revient à déterminer le segment commun à deux involutions tracées sur une même droite ; on est ainsi ramené à un problème déjà résolu, et nous laissons à nos jeunes lecteurs le soin de le discuter.

Mais les applications les plus importantes résultent surtout du *théorème de Désargues* ; et comme ce théorème, malgré sa fécondité et son élégance, n'appartient pas régulièrement à l'enseignement classique, nous croyons devoir en donner ici la démonstration et les principales conséquences.

Soient $U(x,y) = 0, \quad V(x,y) = 0$

les équations de deux coniques qui se coupent en quatre points réels ou imaginaires ; si par un point fixe M_0 $[x_0, y_0]$ du plan nous menons une transversale arbitraire représentée par les équations

$$x = x_0 + ar$$
$$y = y_0 + br$$

et si nous posons :

$$U(x_0 + ar, y_0 + br) = f(r)$$
$$V(x_0 + ar, y_0 + br) = g(r)$$

l'équation $f(r) + \lambda\, g(r) = 0$

déterminera les rayons vecteurs, comptés de M_0, des rencontres de la transversale supposée fixe par une quelconque des coniques du faisceau [U, V], coniques que l'on produit successivement en modifiant d'une manière continue le paramètre λ; donc d'après la forme de l'équation

$$[r, \lambda] \quad f(r) + \lambda\, g(r) = 0$$

les segments déterminés par les coniques successives d'un faisceau sur une même transversale sont les segments consécutifs d'une même involution ; c'est précisément le théorème de Désargues ; et si nous ne nous trompons, la démonstration que nous venons d'exposer ne diffère pas, au fond, de celle qui fut donnée par *Sturm* dans les annales de Gergonne.

Le discriminant de $[r, \lambda]$ est un trinôme du second degré : $G\lambda^2 + 2H\lambda + K$;

d'où l'on conclut : *Dans un faisceau de coniques, il y en a deux qui sont tangentes à une droite donnée* ; et les points de contact sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite donnée par la série des coniques.

En particulier, *il y a deux paraboles qui passent par quatre points donnés, c'est-à-dire : il y a deux coniques qui passent par quatre points donnés et touchent la droite de l'infini.*

On voit ainsi, sans entrer dans le détail des constructions, que la détermination d'une conique par quatre points et une tangente revient à la détermination des points doubles d'une involution dont on connaît au moins deux segments.

Un cas important du théorème de Désargues doit être signalé à cause de ses fréquentes applications, et a été signalé par M. *Chasles :* c'est celui où il s'agit de coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés ; dans ce cas, l'une des coniques du faisceau est précisément la double corde de contact qui joint les deux points fixes ; et par suite *l'involution que les coniques successives déterminent sur une transversale fixe a un de ses points doubles sur la corde de contact.*

Ce théorème nous fournit l'occasion d'ajouter quelques détails à ce que nous avons déjà dit sur l'Involution en général, et sur un de ses états particuliers : d'abord nous remarquons que si l'extrémité d'un segment vient au centre, l'autre extrémité va à l'infini et réciproquement; en second lieu, que si la relation d'involution se réduit à la forme linéaire

$$u + v = \text{constante},$$

le centre se trouve transporté à l'infini, et tous les segments ont le même milieu.

Mais quand on prend les coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés, et que ces deux points de contact se transportent à l'infini, on a la suite des hyperboles qui sont asymptotes à deux droites données; donc :

Quand on prend la suite des hyperboles qui ont pour asymptotes deux droites données, l'involution déterminée par ces coniques sur toute droite de leur plan a l'un de ses points doubles transporté à l'infini ; et par suite tous ses segments ont le même milieu ; ce qui nous montre comment une propriété, très particulière en apparence, de l'hyperbole se déduit simplement d'une proposition générale sur les coniques ; et nous croyons qu'il importe, surtout dans l'enseignement, de ré-

duire le plus possible le nombre des propriétés qui se traduisent par des énoncés essentiellement distincts; c'est d'ailleurs le moyen, le seul, de se conformer aux principes de la géométrie moderne si vivement mis en évidence par *Poncelet* d'abord, et ensuite par *Chasles*.

Comme il faut savoir se borner, nous terminerons ici cet article; mais nous serons heureux s'il peut servir à familiariser nos jeunes lecteurs avec une théorie que nous exposons régulièrement dans nos cours, ainsi qu'en peuvent témoigner nos élèves, et aussi M. Bourget, notre ancien directeur des études à Sainte-Barbe.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

(Par M. **G. de Longchamps.**

Suite, voir pages 197, 217 et 241.)

IX. — Définition des nouvelles fractions. — Considérons la relation de récurrence

$$U_n - 2pU_{n-1} + qU_{n-2} = 0, \quad (p^2 - q) > 0, \qquad (F)$$

et désignons par α_n et β_n deux intégrales particulières de cette équation. Posons

$$\begin{array}{ll} X_0 = \alpha_0 & Y_0 = \beta_0 \\ X_1 = \alpha_0 + \alpha_1 & Y_1 = \beta_0 + \beta_1 \\ X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & Y_2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, & Y_n = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n, \end{array}$$

et considérons les fractions suivantes:

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{X_n}{Y_n}.$$

Nous supposerons que $(p^2 - q)$ est positif et nous établirons d'abord que les fractions que nous venons d'imaginer ont une limite, quand n croît au delà de toute limite. Mais il est nécessaire d'entrer, au préalable, dans quelques détails.

X. — Nous aurons à considérer, dans ce qui va suivre, l'équation génératrice

$$x^2 - 2px + q = 0, \qquad\qquad (G)$$

et nous appellerons x' et x'' ses racines. Nous supposerons que x' et x'' sont des quantités différentes et que l'on a $x' < 1$ et $x'' > 1$.

Pour légitimer cette dernière hypothèse nous ferons observer, avant d'aller plus loin, qu'il est toujours possible de satisfaire aux conditions

$$x' < 1, \quad x'' > 1.$$

En effet, si l'on suppose $q > 0$ et $1 - 2p + q < 0$, le nombre 1 sépare bien les deux racines x', x''. Mais, si l'on suppose $1 - 2p + q > 0$, alors on pourra poser $U_n = \lambda^n V_n$ et les fonctions V_n vérifient la formule suivante :

$$\lambda^2 V_n - 2\lambda p V_{n-1} + q V_{n-2} = 0.$$

L'équation génératrice est alors

$$\lambda^2 x^2 - 2\lambda px + q = 0,$$

et en substituant l'unité on trouve $\lambda^2 - 2\lambda p + q$; d'ailleurs, le trinôme $x^2 - 2px + q$ prend nécessairement des valeurs négatives pour des valeurs convenables de x, puisqu'on suppose $p^2 - q > 0$. On pourra donc trouver des valeurs de λ telles que l'on ait $\lambda^2 - 2\lambda p + q < 0$. Par conséquent, en changeant, si la chose est nécessaire, les coefficients donnés, on pourra toujours supposer que les racines de l'équation génératrice sont séparées par l'unité.

On verra tout à l'heure pourquoi nous insistons sur la réalisation, toujours possible, de l'hypothèse que nous venons de faire. Dans tous les cas, il résulte de ce que nous venons de dire que la plus grande racine x'' de l'équation génératrice pourra toujours être supposée supérieure à l'unité; c'est là, à proprement parler, le fait important, et s'il arrive que la seconde racine x' soit plus grande que l'unité, ceci n'empêchera pas les conclusions auxquelles nous allons aboutir d'être vraies; la seule chose essentielle étant, en résumé, que *l'une au moins des deux racines soit supérieure à l'unité.*

Si l'on ne veut pas que les deux racines soient séparées par l'unité, si l'on tient seulement à s'assurer que l'une

d'elles, au moins, est supérieure à 1, nous ferons remarquer, incidemment, que cette condition se trouve réalisée très simplement par le changement de fonctions que nous allons indiquer.

Si l'on suppose $q > 1$, une racine, au moins, est plus grande que 1; supposons donc $q < 1$ et posons

$$U_n = pq^n V_n.$$

Les fonctions V satisfont à la relation suivante :

$$pq^n V_n - p^2 q^{n-1} V_{n-1} + pq^{n-1} V_{n-2} = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$V_n - \frac{p}{q} V_{n-1} + \frac{1}{q} V_{n-2} = 0.$$

Puisqu'on suppose $q < 1$, l'équation génératrice qui correspond à cette relation de récurrence aura deux racines, dont l'une, au moins, est supérieure à l'unité.

XI. — Théorème. — *La fraction* $\frac{X_n}{Y_n}$ *a une valeur bien déterminée, quand* n *croît indéfiniment.*

En effet, puisque α_n et β_n sont deux intégrales particulières de l'équation (F), il résulte du théorème de Lagrange qu'on peut poser

$$\alpha_n = \lambda_1 x'^n + \lambda_2 x''_n$$

et

$$\beta_n = \mu_1 x'^n + \mu_2 x''_n.$$

Dans ces égalités, x' et x'' désignent les racines de l'équation (G) et nous rappelons ici que nous supposons ces racines réelles et inégales, et que l'une d'elles, au moins, est supérieure à l'unité. Posons donc

$$x' < x'' \qquad (1)$$

et

$$1 < x''. \qquad (2)$$

Nous avons d'ailleurs :

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 x' + \lambda_2 x'') + \ldots + (\lambda_1 x'^n + \lambda_2 x''^n)}{(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 x' + \mu_2 x'') + \ldots + (\mu_1 x'^n + \mu_2 x''^n)}$$

et, par suite,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\lambda_1 \dfrac{(x'^{n+1} - 1)}{x' - 1} + \lambda_2 \dfrac{x''^{n+1} - 1}{x'' - 1}}{\mu_1 \dfrac{x'^{n+1} - 1}{x' - 1} + \mu_2 \dfrac{x''^{n+1} - 1}{x'' - 1}}.$$

Cette relation peut s'écrire encore

$$\frac{x'^{n+1}-1}{x'-1}\left(\lambda_1-\mu_1\frac{X_n}{Y_n}\right)=\frac{x''^{n+1}-1}{x''-1}\left(\mu_2\frac{X_n}{Y_n}-\lambda_2\right)$$

ou

$$\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}\cdot\frac{x''-1}{x'-1}=\frac{\mu_2\frac{X_n}{Y_n}-\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1\frac{X_n}{Y_n}}. \qquad (3)$$

Cherchons la limite du premier membre de cette égalité, quand n croît au delà de toute limite. A cet effet remarquons que nous avons, identiquement,

$$\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}=\frac{\left(\frac{x'}{x''}\right)^{n+1}-\frac{1}{x''^{n+1}}}{1-\frac{1}{x''^{n+1}}}.$$

Les inégalités (1) et (2) prouvent donc que

$$\lim\frac{x'^{n+1}-1}{x''^{n+1}-1}=0, \quad (\text{pour } n=\infty).$$

Le second membre de l'égalité (3) a donc pour limite zéro, ce qui donne

$$\lim\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad (\text{pour } n=\infty).$$

XII. — On peut objecter pourtant que cette conclusion n'est plus exacte si l'on suppose que $\frac{X_n}{Y_n}$ croisse au delà de toute limite en même temps que n, le numérateur et le dénominateur du second membre de l'égalité (3) croissant, l'un et l'autre, au delà de toute limite. Cette objection est d'autant lus spécieuse que nous voulons montrer que $\frac{X_n}{Y_n}$ admet une limite. Mais nous allons reconnaître que cette hypothèse est inadmissible, si, comme nous le supposons formellement, les racines de l'équation génératrice sont des nombres incommensurables.

En effet, le second membre de (3) peut s'écrire

$$\frac{\mu_2-\lambda_2\frac{Y_n}{X_n}}{\lambda_1\frac{Y_n}{X_n}-\mu_1}. \qquad (4)$$

Si l'on suppose que $\frac{X_n}{Y_n}$ croisse au delà de toute limite, $\frac{Y_n}{X_n}$ a pour limite zéro et la limite de l'expression (4) est $-\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Cette limite est toujours égale à celle du premier membre de (3), c'est-à-dire égale à zéro.

Ainsi, dans le cas singulier qui nous occupe, il faut supposer que l'on a $\mu_2 = 0.$

Mais l'égalité $\beta_n = \mu_1 x'^n + \mu_2 x''^n,$

devient alors $\beta_n = \mu_1 x'^n,$

et l'on a

$$\beta_0 = \mu_1,$$

$$\beta_1 = \mu_1 x';$$

et par suite

$$\beta_0 x' = \beta_1. \qquad (5)$$

Les nombres β_0, β_1 qui sont, avec α_0 et α_1, les valeurs initiales données, sont, bien entendu, des quantités commensurables, et l'égalité (5) donnerait pour x' une valeur commensurable, ce que nous ne supposons pas. Ainsi μ_2 est une quantité nécessairement différente de zéro, et, pour $n = \infty$, $\frac{X_n}{Y_n}$ a une limite bien déterminée et égale à $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Nous allons maintenant préciser la valeur de $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

XIII. — Dans le problème qui nous occupe les données sont : 1° les coefficients p et q de l'équation (G), équation dont nous désignons les racines par x' et x''; 2° les constantes initiales α_0, α_1 qui permettent le calcul, par voie récurrente, des fonctions $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; 3° les constantes initiales β_0, β_1 qui, de la même façon permettent le calcul de β_2, β_3, $\ldots$, β_n.

Les paramètres que nous avons introduits $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$; sont liés à ces données par les égalités suivantes :

$$\alpha_0 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\alpha_1 = \lambda_1 x' + \lambda_2 x'';$$

et

$$\beta_0 = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\beta_1 = \mu_1 x' + \mu_2 x''.$$

On déduit de ces relations, par combinaison,

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 x'}{\beta_1 - \beta_0 x'}.$$

Telle est la valeur de $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, valeur qui est incommensurable, si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}$ est différent de zéro. Il faut observer d'ailleurs que cette condition est nécessairement remplie dans l'hypothèse où nous nous sommes placé. En effet, si l'on a

$$\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = 0,$$

toutes les fractions

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{X_n}{Y_n}, \quad \ldots$$

ont la même valeur. Nous supposerons donc que les quatre constantes initiales, *qu'on peut choisir arbitrairement,* pour développer, par notre méthode, une irrationnelle du second degré, ne forment pas une proportion. Avec cette réserve, nous pourrons maintenant énoncer le théorème suivant, qui est la base de cette théorie :

Théorème fondamental. — *La fraction* $\frac{X_n}{Y_n}$, *pour* $n = \infty$, *a une valeur limite bien déterminée, savoir celle de*

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0 x'}{\beta_1 - \beta_0 x'}.$$

Dans cette expression, α_0, α_1 ; β_0, β_1 *sont des nombres arbitraires, mais non en proportion, et* x' *désigne la plus petite des racines de l'équation génératrice, équation ayant des racines réelles et incommensurables.* *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. H. Le Pont.

Nous nous proposons, dans cette note, d'établir les deux théorèmes suivants :

I. — *Les coordonnées d'une courbe d'ordre* n *qui n'a que* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3$ *points doubles différents, s'expriment*

rationnellement en fonction d'un paramètre λ *et de l'expression*

$$k = j\sqrt[3]{u(\lambda) + \varepsilon\sqrt{v(\lambda)}}$$

ε *et* j *désignant une racine carrée et une racine cubique de l'unité;* u (λ) *et* v (λ) *des fonctions entières de* λ.

II. — *Les coordonnées d'une courbe d'ordre* n *qui n'a que* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 4$ *points doubles différents s'expriment rationnellement au moyen d'un paramètre* λ *et de la racine carrée d'une fonction* k.

Soit
$$f(x,y) = 0$$
l'équation d'une courbe C_n d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3$ points doubles D.

Par les points D et par un point quelconque P pris arbitrairement sur la courbe C_n, nous pouvons toujours faire passer une courbe d'ordre $(n-3)$: car le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$ de ces points est moindre d'une unité que le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ de points nécessaires pour déterminer cette courbe.

Soient
$$\varphi(x,y) = 0, \qquad \psi(x,y) = 0,$$
les équations de deux courbes C'_{n-3} et C''_{n-3} d'ordre $(n-3)$ passant par le point P et les points D. L'équation
$$\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0, \qquad (1)$$
où λ est un paramètre variable, représente un faisceau de courbes C_{n-3} d'ordre $(n-3)$, ayant pour points fondamentaux le point P et les points D. Chacune de ces courbes rencontre la courbe C_n en trois autres points. Donc

A chaque valeur du paramètre λ correspondent trois points de la courbe C_n, et à chaque point de C_n correspond une seule valeur λ.

Nous pouvons de même par les points doubles D et n points fixes $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, choisis arbitrairement sur la courbe C, faire passer un faisceau de courbes C_{n-2} d'ordre $(n-2)$:
$$\chi(x,y) + \rho\omega(x,y) = 0 \qquad (2)$$

ρ étant un paramètre variable, et

$$\chi(x,y) = 0 \qquad \omega(x,y) = 0,$$

désignant deux courbes quelconques C'_{n-2} et C''_{n-2}, d'ordre $(n - 2)$ passant par les points D et par les points Q ; et chaque courbe de ce faisceau rencontre C_n en quatre autres points. Donc

A chaque valeur du paramètre ρ correspondent quatre points de la courbe C_n, et à chaque point de C_n correspond une seule valeur de ρ.

Par suite, à chaque valeur de λ correspondent trois valeurs de ρ, et à chaque valeur de ρ correspondent quatre valeurs de λ ; λ et ρ sont donc liés par une équation de la forme

$$F(\lambda,\rho) = \omega_0(\lambda)\rho^3 + 3\omega_1(\lambda)\rho^2 + 3\omega_2(\lambda)\rho + \omega_3(\lambda) = 0, \quad (3)$$

les $\omega(\lambda)$ étant des polynômes entiers du quatrième degré en λ.

Ceci posé, d'après la détermination de nos courbes C_{n-2} et C_{n-3}, les équations

$$\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0 \qquad \chi(x,y) + \rho\omega(x,y) = 0 \qquad f(x,y) = 0$$

n'ont qu'une solution en x et en y, excepté quand x et y correspondent aux points fondamentaux des faisceaux C_{n-2} et C_{n-3}. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe C_n s'exprimeront donc rationnellement en λ et en ρ, c'est-à-dire en λ et en k : car les racines de l'équation (3) sont une somme de fonctions k. C. Q. F. D.

Le second théorème se démontre de la même manière :

On prend un faisceau de courbes d'ordre $(n - 3)$ déterminé par les points doubles de C_n et deux points fixes arbitraires P_1 et P_2 de cette courbe : un second faisceau de courbes d'ordre $(n - 2)$ aura pour points fondamentaux les points doubles de C_n et $(n + 1)$, points choisis à volonté sur la courbe. Chaque courbe C_{n-3} rencontre C_n en quatre nouveaux points, chaque courbe C_{n-2} la rencontre en cinq, et l'équation

$$F(\lambda,\rho) = 0$$

est du quatrième degré en λ et du cinquième en ρ, et aura ses coefficients entiers et rationnels. On pourra toujours, par une substitution rationnelle, exprimer les quatre valeurs de ρ qui satisfont à cette équation, au moyen des sommes trois à trois des racines d'une équation bicubique :

$$H(\lambda,\rho) = \theta_0(\lambda)\mu^6 + 3\theta_1(\lambda)\mu^4 + 3\theta_2(\lambda)\mu^2 + \theta_3(\lambda) = 0,$$

où les $\theta(\lambda)$ sont des fonctions rationnelles de λ ; ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Lorsqu'une courbe d'ordre n a moins de $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 4$ points doubles, ses coordonnées ne peuvent plus s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre et de fonctions algébriques de ce paramètre.

En effet, soit $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ le nombre des points doubles de la courbe C_n : le faisceau des courbes C_{n-3} aura pour points fondamentaux les points doubles et $(p-2)$, points fixes arbitraires de C_n; celui des courbes C_{n-2} sera défini par les points doubles de C_n et $(n+p-3)$, points pris à volonté sur cette courbe, et l'équation

$$F(\lambda,\rho) = 0$$

sera de degré p en ρ et de degré $(p+1)$ en λ. Pour $p > 4$, ρ ne peut plus s'exprimer par des fonctions algébriques des coefficients de cette équation, et par suite, x et y ne peuvent plus être rationnels par rapport à λ et à une fonction algébrique de λ.

Nous croyons utile, en terminant, de rappeler qu'une courbe d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles est quarrable par les fonctions algébriques et logarithmiques, et par les fonctions circulaires inverses; qu'une courbe d'ordre n possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ points doubles est quarrable par les fonctions elliptiques. (Voir Laurent, *Théorie des fonctions elliptiques.)*

Enfin, M. Schwartz a fait voir que les coordonnées d'un point d'une courbe d'ordre n qui présente $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$ points doubles, s'expriment rationnellemeut au moyen d'un paramètre et de la racine carrée d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré de ce paramètre. (Voir *Journal de Liouville*, 1880.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1882

Solution par M. H. Le Pont.

On donne une ellipse et un point P *dans son plan :*

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passent par le point P ;

2° Trouver pour chacune des positions du point P *combien de ces cercles sont réels ;*

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et des cercles osculateurs sont sur un même cercle C ;

4° Trouver l'enveloppe E *de ces cercles* C, *quand le point* P *décrit l'ellipse donnée ;*

5° La courbe E *peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont une conique. Chercher de combien de manières différentes est susceptible ce mode de génération.*

Soient
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$
l'ellipse donnée, et (x_0, y_0) les coordonnées du point P. L'équation d'un cercle tangent à l'ellipse aux points (ξ, η) et tel que la corde commune passe par le point P est
$$\left(\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1\right)\left[\frac{\xi(x - x_0)}{a^2} - \frac{\eta(y - y_0)}{b^2}\right] = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$
Déterminant k pour la condition que le contact soit du second ordre, c'est-à-dire que la corde d'intersection passe par le point (ξ, η), il vient
$$k = \frac{\xi(\xi - x_0)}{a^2} - \frac{\eta(\eta - y_0)}{b^2}$$
ce qui donne pour équation du cercle osculateur
$$\left(\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1\right)\left[\frac{\xi(x - x_0)}{a^2} - \frac{\eta(y - y_0)}{b^2}\right]$$
$$= \left[\frac{\xi(\xi - x_0)}{a^2} - \frac{\eta(\eta - y_0)}{b^2}\right]\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \qquad (2)$$

Les coefficients de x^2 et de y^2 étant égaux dans cette équation, nous avons entre ξ et η la relation

$$C = \frac{\xi^2 + \eta^2}{c^2} - \frac{\xi x_0}{a^2} + \frac{\eta y_0}{b^2} = 0 \qquad (3)$$

c^2 désignant suivant l'usage la quantité $a^2 - b^2$.

On voit que les points de contact des cercles osculateurs considérés et de l'ellipse sont les points d'intersection de cette courbe et du cercle C.

Le nombre des cercles osculateurs réels ou imaginaires satisfaisant à la question est évidemment le même que le nombre des normales réelles ou imaginaires menées à l'ellipse donnée par le centre (X, Y) :

$$X = \frac{c^2}{2}\frac{x_0}{a^2}, \qquad Y = -\frac{c^2}{2}\frac{y^0}{b^2}, \qquad (4)$$

du cercle C. Remplaçant alors dans l'équation de la développée de cette ellipse

$$(aX)^{\frac{2}{}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

X et Y par leurs valeurs en fonction de x_0 et de y_0, il vient

$$\left(\frac{x_0}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \qquad (5)$$

C'est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{4a^2b^2}{c^4}.$$

Nous avons donc : lorsque le point P est à l'intérieur de cette développée, quatre cercles osculateurs réels ; trois cercles réels lorsque le point P est sur la courbe, et deux seulement lorsqu'il est à l'extérieur.

L'enveloppe des cercles C, quand le point P décrit l'ellipse donnée, s'obtient en éliminant x_0 et y_0 entre les équations

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} = 1 \qquad \frac{\xi}{x_0} = -\frac{\eta}{y_0}$$

et l'équation (3), ce qui donne l'équation

$$E = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{c^4} - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0. \qquad (6)$$

C'est l'inverse de l'ellipse donnée en prenant son centre pour pôle et pour module le carré de sa distance focale. Si nous remarquons que le point P décrivant l'ellipse donnée,

le centre (X, Y) du cercle C décrit l'ellipse

$$S = \frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} - \frac{c^4}{4a^2b^2} = 0, \qquad (7)$$

nous voyons que la courbe E est l'enveloppe d'un système de cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique; car les cercles C peuvent être considérés comme coupant à angle droit un cercle de rayon nul concentrique à l'ellipse.

Ce mode de génération n'est d'ailleurs possible que de cette seule manière, Considérons en effet un cercle fixe

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny - r^2 = 0, \qquad (8)$$

et un cercle quelconque le coupant à angle droit

$$x^2 + y^2 + 2p(x+m) + 2q(y+n) + r^2 = 0, \qquad (9)$$

dont le centre $(-p, -q)$ décrit la conique

$$L(x+u)^2 + 2M(x+u)(y+v) + N(y+v)^2 = 1. \qquad (10)$$

Nous obtiendrons l'enveloppe de ce cercle en éliminant p et q entre les équations

$$\left.\begin{array}{l} L(p-u)^2 + 2M(p-u)(q-v) + N(q-v)^2 = 1 \\ \dfrac{L(p-u) + M(q-v)}{x+m} = \dfrac{M(p-u) + N(q-v)}{y+n} \end{array}\right\} \qquad (11)$$

et l'équation (9), ce qui donne

$$\{(x^2 + y^2 + r^2) + 2[x+m) + v(y+n]\}\sqrt{LN - M^2}$$
$$= \pm\sqrt{L(y+n)^2 - 2M(x+m)(y+n) + N(x+m)^2}.$$

Élevant au carré et identifiant avec l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = C^4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

nous obtenons d'abord

$$u = 0, \quad v = 0, \quad m = 0, \quad n = 0, \quad M = 0,$$

ce qui résultait *à priori* de la symétrie des courbes E et S,

et par suite $\quad r = 0, \quad L = \frac{c^4}{4b^2}\ N, = \frac{c^4}{4a^2},$

ce qui nous donne les cercles et l'ellipse indiqués précédemment.

QUESTION 395

Solution par M. Lelieuvre, élève au Lycée de Rouen.

On donné une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *et un point* P *de coordonnées* α, β. *On mène les tangentes* PA *et* PB *à l'ellipse, puis les normales* AI *et* IB *en* A *et* B. *Du point* I *on mène les deux autres normales* IC *et* ID *et les tangentes en* C *et* D *qui se coupent en* M. *1° Exprimer les coordonnées du point* M *avec celles de* P; *2° lieu de* M *quand* P *se déplace, de façon que les normales* AI *et* IB *fassent toujours un angle droit.*

Établissons d'abord le théorème suivant : Le produit des ordonnées à l'origine de deux quelconques des droites qui joignent deux à deux les pieds des quatre normales menées d'un point à une ellipse, est égal à $-b^2$, et le produit de leurs coefficients angulaires $= \frac{b^2}{a^2}$.

En effet, les pieds des quatre normales menées d'un point pq à une ellipse sont sur l'hyperbole

$$(a^2 - b^2)xy + b^2qx - a^2py = 0.$$

Soient $y - kx - h = 0$ et $y - tx - s = 0$ les deux droites qui forment un des systèmes de sécantes communes à l'ellipse et à l'hyperbole; l'équation d'une conique passant par les intersections de l'ellipse et de ces deux droites est de la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + \lambda(y - kx - h)(y - tx - s) = 0.$$

En identifiant cette équation et celle de l'hyperbole, on aura des équations qui donneront k, h, t et s. D'ailleurs, en remarquant que l'équation de l'hyperbole ne contient pas de terme en x^2, en y^2 ni de terme constant, on a de suite

$$a^2 + \lambda = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = -a^2,$$

$$b^2 + \lambda kt = 0 \quad \text{ou} \quad kt = \frac{b^2}{a^2},$$

et $$\lambda hs - a^2b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad hs = -b^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Or, supposons que l'une des droites, AB, soit la polaire du point $\alpha\beta$. Son équation sera

$$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0$$

ou

$$y = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}x + \frac{b^2}{\beta}.$$

L'ordonnée à l'origine est $\frac{b^2}{\beta}$; donc celle de la droite CD est $-\beta$, puisque leur produit est $-b^2$. De même le coefficient angulaire de CD $= -\frac{b^2a^2\beta}{a^2b^2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Donc l'équation de la droite CD est

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x - \beta \text{ ou } -\frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} = 1.$$

Alors il est facile d'avoir les coordonnées du point M qui est le pôle de CD. Car si x_0y_0 sont ces coordonnées, CD a aussi pour équation

$$a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2,$$

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \frac{b^2}{y_0};$$

d'où, en identifiant,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}, \qquad \frac{b^2}{y_0} = -\beta;$$

$$y_0 = -\frac{b^2}{\beta}, \qquad x_0 = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Alors, si les normales AI et BI se déplacent en faisant toujours entre elles un angle droit, il en est de même des tangentes PA et PB, et par suite le point P décrit le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse; par suite ses coordonnées sont liées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2;$$

or

$$\alpha = -\frac{a^2}{x_0}, \qquad \beta = -\frac{b^2}{y_0}.$$

Donc le lieu du point M a pour équation

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = a^2 + b^2.$$

Cette équation représente une courbe symétrique par rapport aux axes et présentant quatre asymptotes parallèles

deux à deux aux axes et dont les équations sont

$$y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Cazemajou, Desplans, à Marseille; Houdry, à Melun; Cartier, à Angoulême.

QUESTION 39

Solution par M. Kauffmann, élève au Lycée de Bordeaux.

On considère une hyperbole H *ayant pour asymptotes les droites* Ox, Oy. *Soit* M *un point de cette courbe. On mène une parallèle à* Ox *qui rencontre* Oy *en un point* I. *Soit* Q *le symétrique de* P *par rapport à* M. *Par* Q *on mène une parallèle à* Oy *qui rencontre* H *en* R *et par* R *on mène une parallèle* D *à* Ox.

On propose de démontrer que toute transversale D′ *menée par* M *rencontre* QR *et* H *en des points équidistants de* D. *Soit* T *le point où la tangente en* S *rencontre* Oy : *démontrer que la parallèle à* D′ *menée par* T *et* QR *se coupent sur* Ox.

1° Pour démontrer la première partie il nous suffit de démontrer que E est le milieu de AS. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Par S je mène des parallèles à Ox et à Oy. La première coupe QR en F, la seconde Ox en I.

Les deux triangles GMP, MQA sont égaux.

Donc PG = AQ. Les triangles égaux GMP, SIK me donnent PG = SI. Donc SI = AQ = BF.

Comme le point R est le milieu de QB, R sera aussi le milieu de AF ; ce qui nous montre que E est le milieu de AS ;

2° Je mène BT. Les triangles OBT, SIK sont semblables. Comme S est le milieu de TT′, OT = 2SI ; IK = PM ; donc OB = PQ = 2IK. Les droites BT et SK sont deux parallèles.

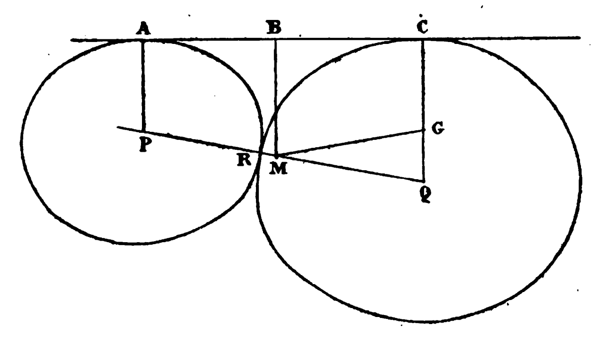
NOTA. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Keruzoret; Clément, à Rouen; Callé à Grenoble.

QUESTION 43

Solution par M. Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On donne une droite terminée aux points P *et* Q; *soit* R *un point pris sur* PQ; *du point* P *comme centre avec* PR *pour rayon, on décrit un cercle, et du point* Q *avec* QR, *un autre cercle; on mène une tangente commune à ces cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.* (G. L.)

Prenons PQ pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire en son milieu. Soit PQ $= 2a$.



Les équations des deux cercles sont

$$(x - a)^2 + y^2 = \rho^2; \qquad (x + a)^2\, y^2 = (2a - \rho)^2.$$

Les tangentes au point (φ) aux deux cercles sont respectivement

$$(x - a)\cos\varphi + y\sin\varphi = \rho; \quad (x - a)\cos\varphi + y\sin\varphi = 2a - \rho.$$

Exprimons qu'elles se confondent; pour cela, on doit avoir

$$\rho = a(1 - \cos\varphi); \quad \text{ou} \quad \rho - 2a = -a(1 + \cos\varphi);$$

ce qui représente deux limaçons de Pascal égaux, ayant respectivement un point de rebroussement, aux points P et Q.

Solution géométrique. — Considérons deux cercles satisfaisant aux conditions énoncées, et la tangente commune

à ces deux cercles; du milieu de PQ abaissons une perpendiculaire sur la tangente : cette droite est égale à la demi-somme des rayons, c'est-à-dire à $\frac{PQ}{2}$. Donc, le lieu demandé se compose des podaires des points P et Q par rapport au cercle décrit sur PQ comme diamètre.

QUESTION 43

Solution par M. Kauffmann, au Lycée de Bordeaux.

On donne une droite terminée aux points P *et* Q. *Soit* R *un point pris sur* PQ. *Du point* P *comme centre avec* PR *pour rayon on décrit un cercle et du point* φ *avec* φR *un autre cercle ; on mène une tangente commune à ces deux cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.*

Soient A et C deux points du lieu, A étant sur la circonférence décrite du point P comme centre et C sur la circonférence décrite du point Q. Soit M le milieu de PQ. La perpendiculaire MB abaissée du point M sur AC est égale à $\frac{AP + QC}{2} = \frac{PQ}{2}$. Si par le point M je mène une parallèle à AC, le lieu du point G sera un cercle et comme la longueur CG est égale à MB, c'est-à-dire est constante, le lieu du point C est un limaçon. On démontrerait de même que le lieu du point A est un limaçon.

Le lieu décrit par les points A et C est l'ensemble des deux quartiques.

VARIÉTÉS (*)

Supposons que deux nombres u_n, u_{n-1} soient liés par l'équation de récurrence

$$u_n = 2u_{n-1} + 1 \qquad (A)$$

et proposons-nous de trouver u_n qui est une fonction de n et de la donnée initiale u_0. Il est facile de faire rentrer (A) dans les équations récurrentes proprement dites, ou équations de Lagrange, que nous avons étudiées récemment dans ce journal (**).

En effet, l'équation (A) donne la suivante:

$$u_{n-1} = 2u_{n-2} + 1. \qquad (A')$$

La combinaison des relations (A), (A') donne l'égalité

$$u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0. \qquad (B)$$

L'équation génératrice est donc

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

dont les racines sont 1 et 2. L'intégrale générale de l'équation (B) est donc, d'après le théorème de Lagrange, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure,

$$u_n = \lambda . 1^n + \mu 2^n;$$

ou,

$$u = \lambda + \mu 2^n. \qquad (C)$$

Dans cette égalité les paramètres λ et μ ne sont pas deux constantes arbitraires, parce que, d'après l'équation (A), on a

$$u_1 = 2u_0 + 1.$$

Or, l'égalité (C) donne

$$u_0 = \lambda + \mu,$$

et,

$$u_1 = \lambda + 2\mu.$$

On a donc,

$$\lambda + 2\mu = 2\lambda + 2\mu + 1,$$

ou

$$\lambda = -1.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation (A), avec le seul

(*) A propos de cet article, on peut consulter: RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES *par* M. ED. LUCAS, *professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.* (2 vol., chez GAUTHIER-VILLARS.)

(**) Voir *Journal*, p. 193.

paramètre arbitraire qu'elle exige, est

$$u_n = \mu 2^n - 1.$$

Le cas le plus simple que l'on puisse imaginer est celui où la constante initiale u_0 est nulle.

Dans cette hypothèse on a

$$\lambda + \mu = 0,$$

et, par suite, $\mu = 1.$

L'intégrale de (A) est alors une fonction de n, bien définie et correspondant à la formule

$$u_n = 2^n - 1.$$

Cette application d'idées plus générales que nous avons développées ici *(loc. cit.)*, nous a été inspirée par une lettre que nous avons reçue, en ces temps derniers, du professeur N. Claus.

Demandant, pour une fois, la permission de quitter un instant le ton grave ordinaire aux articles de ce journal, nous dirons quelques mots de cette lettre et du sujet dont elle nous entretenait. Nous laisserons ensuite à nos lecteurs le mérite de faire le rapprochement nécessaire entre le calcul qui précède et l'application ingénieuse qui suit.

La lettre du professeur N. Claus est relative à un jeu qui constitue une intéressante récréation mathématique, qu'il a nommée la *tour d'Hanoï*. Les pions, de grandeur inégale, sont au nombre de huit et forment une tour quand ils sont superposés en nombre : 1, 2, 3, ... 8 ; mais dans un ordre décroissant, quand on va de la base au sommet. Trois clous verticaux étant donnés, le problème proposé consiste à déplacer la tour donnée de façon que les matériaux transportés soient toujours situés dans l'ordre décroissant.

Le jeu est toujours possible, et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour.

Pour une tour de deux étages il faut trois coups, au minimum :

$$2^2 - 1;$$

pour une tour de trois étages, sept coups, au minimum:

$$2^3 - 1;$$

en général, pour une tour de p étages il faut, au minimum, un nombre de coups égal à

$$2^p - 1.$$

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

86. — Si l'équation

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots \pm a^n = 0.$$

n'admet que des racines entières et positives,

1° L'expression

$$\frac{a_n(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n)}{6^n}$$

représente un nombre entier, décomposable en une somme de a_n carrés;

2° L'expression

$$\frac{a_n^2(1 + a_1 + \ldots + a_n)^2}{4^n}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de a_n cubes;

3° Le nombre $a_n^2(1 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n)$ est décomposable en une somme algébrique de $2^n a_n$ carrés.

(Laisant.)

87. — Trouver le terme général de la série

6, 210, 7140, 242556 ...

qui renferme, dans leur ordre de grandeur croissante, tous les nombres qui sont, à la fois, triangulaires et doubles d'un triangulaire. *(S. Réalis.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 25976-3.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Algèbre.

Géométrie analytique.

Questions d'examen.